**AZƏRBAYCAN RESPUBLIKASI TƏHSIL NAZIRLIYI**

**SUMQAYIT DÖVLƏT UNİVERSİTETİNİN NƏZDİNDƏ**

**SUMQAYIT DÖVLƏT TEXNIKI KOLLECI**

# *"Sadə riyazi təsəvvürlərin formalaşdırılması kursunun nəzəri əsasları"*

***fənnindən mühazirələr***

**Orta Ixtisas Təhsil müəssisələrində**
**fənnin tədrisi üçün nəzərdə tutulub**

***SUMQAYIT-2020***

**Mövzu 1. Çoxluq anlayışı. Çoxluqların verilməsi üsulları. Çoxluqlar arasında münasibətlər.**

Plan

1. Çoxluq və onun elementləri.
2. Çoxluqların verilməsi üsulları.
3. Sonlu və sonsuz çoxluqlar.
4. Alt çoxluq.
5. Çoxluqların bərabərliyi.
6. Eyler – Venn diaqramları.

Müasir riyaziyyatda ən vacib, çox yayılmış və geniş istifadə olunan anlayışlardan biri də çoxluq anlayışıdır. Məşhur rus riyaziyyatçısı akademik P.S.Aleksandrov demişdir: "Çoxluqlar nəzəriyyəsinin ideya və anlayışları tam mənası ilə demək olar ki, müasir riyaziyyatın bütün bölmələrinə nüfuz etmiş və onun simasını əsaslı surətdə dəyişmişdir. Ona görə də çoxluqlar nəzəriyyəsinin anlayışları ilə tanış olmadan müasir riyaziyyat haqqında düzgün təsəvvür əldə etmək olmaz".

Çoxluq anlayışı riyaziyyatın ilk anlayışlarından biridir. Çoxluq haqqında danışarkən, hər hansı bir obyektin bu çoxluğa daxil olması və ya daxil olmaması faktlarından biri doğru olmalıdır. Bilirik ki, bəzi ilk anlayışlara riyaziyyatda tərif verilmir. Belə ilk anlayışlar misallar əsasında izah edilir. Məsələn, nöqtə, düz xətt, ədəd, müstəvi, kəmiyyət və s. Çoxluq anlayışıda belə ilk anlayışlardandır. Ona görə də çoxluq anlayışı da misallarla izah edilir. Ona tərif verilmir. İnsanlar gündəlik həyatlarında "çoxluq" sözü əvəzinə "meşə", "ilxı", "buket", "toplu", "sürü" və s. sözləri işlədilir.

Çoxluğu əmələ gətirən obyektlər çoxluğun elementləri adlanır. Məsələn: 7, 11, 17, 19 ədədləri natural ədədlər çoxluğunun elementləridir. Çoxluqları bir-birindən fərqləndirmək üçün onları latın və yunan əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə edirlər. Çoxluğun elementləri isə bir qayda olaraq, latın və yunan əlifbasının kiçik hərfləri ilə işarə edilirlər. *A* □□□*a*,*b*,*c*,*d*□□və *B* □□□*c*, *d*, *a*, *b*□□çoxluqlarının elementləri müxtəlif qaydada yazılmasına baxmayaraq, *A* *və B* çoxluğu *a, b, c, d* elementlərinin çoxluğudur. *a* elementinin *A* çoxluğuna daxil olması münasibəti $a \in A$ şəklində göstərilir və belə oxunur: *"a* elementi A çoxluğuna daxildir" və ya *a* *A* çoxluğunun elementidir. *a* elementinin *A* çoxluğuna daxil olmaması faktı isə $a \notin A$kimi işarə edilir, bəzən *a* ∈□*A* də yazırlar. Məsələn: Əgər *A* cüt natural ədədlər çoxluğudursa, onda *16* ∈□*A*, *328* ∈□*A*, 17 $\notin A$ və s.

Elementlərinin sayının sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olaraq çoxluqları sonlu və ya sonsuz çoxluqlara ayırırlar. Əgər verilmiş çoxluğun elementlərinin sayını natural ədədlə göstərmək mümkündürsə, onda belə çoxluqlar **sonlu çoxluqlar** adlanır. Məsələn sinifdəki şagirdlər çoxluğu, 100-ə dək sadə ədədlər çoxluğu, "kitab" sözündəki hərflər çoxluğu, bir buketdə olan güllər çoxluğu və s. sonlu çoxluqlardır.

Natural ədədlər çoxluğu, rasional ədədlər çoxluğu, müstəvinin nöqtələr çoxluğu, 2-yə bölünən natural ədədlər çoxluğu və s. sonsuz çoxluqlardır. Riyaziyyatdan məlumdur ki, 15 rəqəmli ədəddən sonra gələn çoxluqların miqdarı sonsuz çoxluq hesab edilir (trilyondan sonra).

Deməli, sonsuz çoxluqlar o çoxluqlara deyilir ki, onun elementlərinin sayını natural ədələrlə göstərmək mümkün deyil. Həqiqətən bir maşının baqajında olan qumun miqdarı sonlu olduğu halda o sonsuz çoxluqdur.

Çoxluq o zaman verilmiş hesab edilir ki, istənilən elementin bu çoxluğa daxil olub və ya olmadığını birqiymətli söyləmək mümkün olsun. Çoxluqlar aşağıdakı iki üsulla verilir:

1) Çoxluğunun elementlərinin sadalanması üsulu ilə verilməsi

Bu halda çoxluğun elementləri ixtiyari sırada verilir və aralarında vergül işarəsi qoyulur, fiqurlu mötərizə daxilində yazılır.

Məsələn. Əgər *A* çoxluğunun elementləri 2,4,7,8 natural ədədlərindən ibarətdirsə, onda *A* çoxluğu $A=\{2;4;7;8\}$ və yaxud $A=\{7;2;8;4\}$ kimi və s. yazılır. Onda *A* çoxluğu belə oxunur.

"*A*- elementləri 2,4,7,8 olan çoxluqdur". Çoxluğun elementləri sonlu və yaxud çox böyük olmadıqda bu üsuldan istifadə edilir.

Sonsuz çoxluqların verilməsində isə 2 –ci üsuldan istifadə edilir.

2) Çoxluğun elementlərinin xarakteristik xassəsinin göstərilməsi üsulu ilə.

Məsələn. I) tam ədədlər çoxluğu - $\{x|x$ - tam ədəddir$\}$, yaxud $\{x|x\in Z\}$

II) Cüt ədədlər çoxluğu - $\{x|x$ - tam ədəd olub 2-yə bölünür$\}$

III) $M=\{x|x\in N, x<10\}$, $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ Bu 10-dan kiçik olan natural ədədlər çoxluğudur. $M=\{x|x\in N, x<10\}$. Sonsuz çoxluğu işarə edərkən onun bütün elementlərinin elə xassəsi göstərilir ki, verilmiş elementin həmin çoxluğa daxil olub-olmadığını birqiymətli söyləmək mümkün olur, yəni çoxluğun elementlərinin mühüm və ümumi xarakteristik xassələri göstərilir. Məsələn: *A* □□□*x* ∈□□*N, x* : 3□-yəni 3-ə bölünən natural ədədlər çoxluğu. Ola bilər ki, çoxluğun heç bir elementi olmasın. Məsələn: $x^2$□□*2* □□*0* tənliyinin həqiqi kökləri çoxluğuna heç bir ədəd daxil deyil. Heç bir elementi olmayan çoxluq boş çoxluq adlanır və adətən □□ilə işarə edilir. Boş çoxluğun elemntlərinin sayı sıfra bərabərdir.

Yuxarıda demişdik ki, çoxluqların elementləri müxtəlif əşyalar ola bilər. Riyaziyyatda elə çoxluqlar vardır ki, onların elementləri yalnız ədədlərdən ibarətdir.

**Tərif.** Elementləri ədədlərdən ibarət olan çoxluqlara ədədi çoxluqlar deyilir.

Ədədi çoxluqlar da həm sonlu, həm də sonsuz ola bilər.

Bəzi ədədi çoxluqları işarə etmək üçün xüsusi hərflərdən istifadə olunur. Məsələn, natural ədədlər çoxluğu *N* □□□1,2,3,...□, mənfi olmayan bütün tam ədədlər çoxluğu - *N* 0 □□□0,1,2,3,...□, tam ədədlər çoxluğu *Z* □□□...,□3,□2,□1,0,1,2,3,...□, rasional ədədlər çoxluğu *Q*, həqiqi ədədlər çoxluğu *R* ilə işarə edilir.

**Tərif.** Fərz edək ki, iki *A* və *B* çoxluqları verilmişdir. Əgər *A* çoxluğunun hər bir elementi *B* çoxluğunun da elementi olarsa, onda *A* çoxluğuna *B* çoxluğunun alt çoxluğu deyilir. Çoxluqlar arasında bu münasibət $A\subset B$ şəklində yazılır və belə oxunur: "*A B*-yə daxildir" və ya "*A B*-nin alt çoxluğudur". Bəzən $A\subset B$ əvəzinə $B\supset A$ kimi yazılışdan da istifadə olunur, yəni *B* çoxluğu *A* çoxluğunu özündə saxlayır. Alt çoxluğun tərifindən görünür ki, hər bir çoxluq özünün alt çoxluğudur, yəni: $A\subset A$ və ya $A\supset A$ . Tərifə əsasən istənilən boş olmayan *A* çoxluğunun həmişə ən azı iki alt çoxluğu vardır. *A* və ∅ çoxluq. Bu çoxluqlar *A* çoxluğunun qeyri-məxsusi alt çoxluqları adlandırılır. *A* çoxluğunun ∅ -dan və *A*-nın özündən fərqli, istənilən *M* altçoxluğuna *A* çoxluğunun məxsusi alt çoxluğu və ya düzgün hissəsi deyilir.

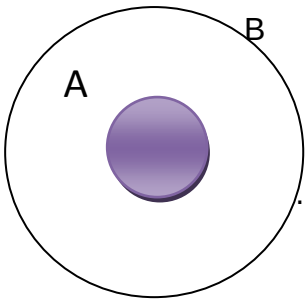
Məsələn: *A* = {*a*,*b*,*c*,*d*}, *B* = {*a*,*b*,*c*,*d*,*f*,*k*} çoxluqları verilmişdir. Göründüyü kimi *A* çoxluğunun bütün elementləri *B* çoxluğunda vardır. Onda $A\subset B$ şəklində yazılır. Bu halda *A* çoxluğu *B*-nin məxsusi alt çoxluğu adlanır. Verilən tərifə əsasən *A* = {*a*,*b*,*c*} çoxluğunun məxsusi alt çoxluqları bunlardır: {*a*},{*b*},{*c*},{*a*,*b*},{*a*,*c*},{*b*,*c*}. *A* çoxluğunun qeyri-məxsusi alt çoxluqları isə {*a*,*b*,*c*} və ∅ çoxluqlarıdır.

**Tərif.** $A\subset B$ və $B\subset A$ şərtlərini ödəyən çoxluqlara bərabər çoxluqlar deyilir və *A* = *B* şəklində yazılır. Məsələn:

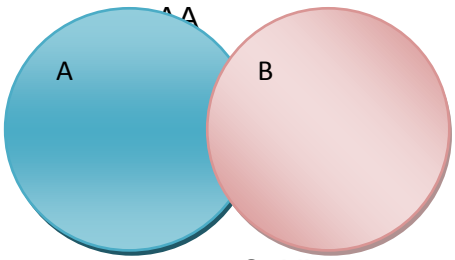
1) *A* = {- 2,10} çoxluğu ilə (*x* + 2)(*x* -10) = 0 tənliyinin kökləri çoxluğu bərabər çoxluqlardır. 2) *A* = {*a*,*b*,*c*, *d*} və *B* = {*c*,*d*, *a*,*b*} çoxluqlarına baxaq. Göründüyü kimi, $A\subset B$ və $B\subset A$. Deməli, *A* = *B* .

3) *A* ilə *x* 2 + 4 = 0 tənliyinin həqiqi kökləri çoxluğunu, *B* ilə *x* 2 - 3 = 0 tənliyinin rasional kökləri çoxluğunu işarə edək. Aydındır ki, bu halda *A* = *B* (*A* =∅ , *B* = ∅).

Çoxluqların bərabərliyinin aşağıdakı xassələri vardır:
1) Refleksivlik xassəsi: $A = A$ .
2) Simmetriklik xassəsi: $A = B$ olarsa, $B = A$ olur.
3) Tranzitivlik xassəsi: $A=B$ və $B=C$ olarsa, $A = C$ olur.
Bəzi hallarda eyni bir çoxluğun alt çoxluqları nəzərdən keçirilir.Bu halda həmin çoxluğa universal çoxluq deyilir və $J$ ilə işarə edilir. Məsələn: Bir universitetin bütün tələbələri çoxluğu universal çoxluq qəbul edilə bilər, çünki həmin universitetdə təhsil alan bütün fakültələrin tələbələri çoxluğu universitetin bütün tələbələri çoxluğunun ($J$) alt çoxluqlarıdır.
Çoxluqlar arasındakı münasibəti əyani şəkildə təsvir etmək üçün Eyler-Venn diaqramlarından istifadə edilir [Eyler (1707-1783) İsveç riyaziyyatçisi, Peterburq EA-nın üzvü, Djon-Venn (1834-1923) ingilis riyaziyyatçısı].Eyler əyani olaraq hər bir çoxluğu dairə şəklində təsvir etməyi təklif etmişdir (bu zaman dairənin ölçüləri və vəziyyəti nəzərə alınmır). Əgər $A$ çoxluğu $B$ çoxluğunun hissəsidirsə, onda $A$–nı ifadə edən dairə $B$-ni ifadə edən dairənin içərisində yerləşdirilir .




Qeyd edək ki, əgər hər hansı iki çoxluğun ortaq elementləri vardırsa və onların heç biri digərinin hissəsi deyilsə, onda bu çoxluqlara uyğun Eyler dairələrinin bir-birini örtən müəyyən hissələri vardır (Şəkil 2).Qeyd edək ki, Eyler-Venn diaqramlarında çoxluqların həmişə dairə şəklində təsvir edilməsi vacib deyil. Dairə əvəzinə istənilən fiqur (müstəvi), məsələn, kvadrat, romb, yarımdairə və s. götürmək olar.




Şəkil 2.

**Mövzu 2. Çoxluqların birləşməsi, kəsişməsi və fərqi. Alt çoxluğun tamamlayıcısı.**

Plan

1. Çoxluqların birləşməsi (cəmi) və xassələri.
2. Çoxluqların kəsişməsi və xassələri.
3. Çoxluqların fərqi. Alt çoxluğun tamamlayıcısı.

**1. Tərif**. A və B çoxluqların heç olmazsa birinə daxil olan bütün elementlərdən düzəldilmiş çoxluğa A və B çoxluqların birləşməsi deyilir və "$A \cup B$" kimi işarə edilir.

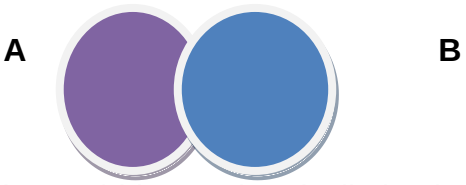
Misal:

1) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{f,k\}$ şəklində olarsa, onda

$C = A \cup B = \{a,b,c,d,f,k\}$ olar. Qeyd edək ki, $A$ və $B$ çoxluqlarının hər birinə daxil olan element bu çoxluqların birləşməsinə daxil olur.

2) $A = \{a,b,g,h,x,q\}$ və $B = \{b,h,x,w\}$ çoxluqlarının birləşməsi olan $C = A \cup B = \{a,b,g,h,x,q,w\}$ çoxlugunda 7 element var. Amma bu iki çoxluğun birlikdə 10 elementi var, yəni birləşməyə hər bir element bir dəfə daxil olur.

**Şəkil1.**




$A$ və $B$ çoxluqlarının birləşməsinə daxil olan ixtiyari $x$ elementi $x \in A$ və ya $x \in B$ xassəsinə malik olduğu üçün $A \cup B$ birləşməsini riyazi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ *və ya* $x \in B\}$.

Buradan görünür ki, birləşməyə daxil olan hər bir element ya $A$-nın elementlərinin xarakterisik xassəsinə və ya $B$-nin elementlərinin xarakteristik xassəsinə malikdir.

Çoxluqların birləşməsinin əsas xassələri var.

1. Kommutativlik xassəsi

İxtiyari A və B çoxluqları üçün $A \cup B = B \cup A$ bərabərliyi doğrudur.

Bu xassənin isbatı çoxluqların birləşməsinin tərifinə əsaslanır. Belə ki, $A \cup B$ cəminin elementləri $B \cup A$ cəminin elementlərinə bərabərdir.

2. Assosativlik xassəsi.

İxtiyari A, B və C çoxluqları üçün $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ bərabərliyi doğrudur.

3. $B \subset A$ olduqda $A \cup B = A$ doğrudur. Xüsusi halda $A \cup A = A,\ A \cup \varnothing = A,\ A \cup J = J \quad (A \subset J)$ bərabərlikləri də doğrudur.

**2. Tərif.** A və B çoxluqlarının bütün ortaq elementlərindən düzələn çoxluğa A və B çoxluqlarının kəsişməsi deyilir və $A \cap B$ kimi işarə edilir.

Məsələn $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{b,c,f,d\}$ olduqda $A \cap B = \{b,c,d\}$ olar. Demək, b,c,d elementləri eyni zamanda həm A çoxluğuna, həm də B çoxluğuna daxildir. Çoxluqların kəsişməsi riyazi şəkildə belə ifadə olunur:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ və } x \in B\}$$

1) $N = \{1,2,3,...,n\}$ natural ədədlər çoxluğu

$N_0 = \{0,1,2,3,...\}$ bütün mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu olsun. Onda bu çoxluqların kəsişməsi $N$ olar.

$$N \cap N_0 = \{N\}$$

2) A-bütün dördbucaqlılar çoxluğu, B isə düzbucaqlılar çoxluğu olsun. Onda $A \cap B = B$ olar.

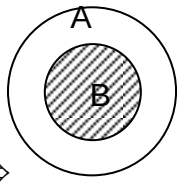
3) A- bütün cüt ədədlər çoxluğu, B isə bütün sadə ədədlər çoxluğu olsun. Onda

$$A = \{2,4,6,8,...,24\},\quad B = \{2,3,5,...\},\ A \cap B = \{2\}$$

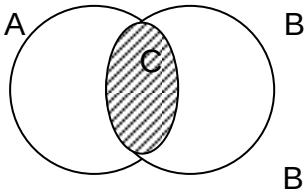
Demək, bir ortaq elementi olduqda da çoxluqlar kəsişirlər. A ilə B çoxluqlarının ortaq elementi yoxdursa, onda onların kəsişməsi boş çoxluq əmələ gətirir və belə işarə olunur: $A \cap B = \varnothing$

Çoxluqların kəsişməsi Eyler- Venn diaqramı vasitəsi ilə əyaniləşdirilir.

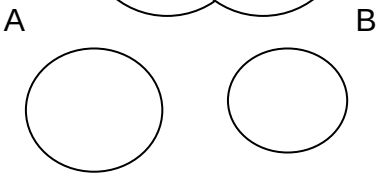
$B \subset A \qquad A \cap B = B \Rightarrow$




$C \subset (A \cup B) \quad \Rightarrow \quad A \cap B = C \Rightarrow$




$A \cap B = \emptyset$




Çoxluqların kəsişməsinin aşağıdakı xassələri var.

1. Çoxluqların kəsişməsi kommutativlik xassəsinə malikdir, yəni ixtiyari iki *A* və *B* çoxluqları üçün aşağıdakı münasibət doğrudur: $A \cap B = B \cap A$

2. Çoxluqların kəsişməsi assosiativdir, yəniixtiyari *A, B* və *C* çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Misal. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ; $B = \{2,4,6,8\}$ ; $C = \{4,5,6\}$

I. $B \cap C = \{4,6\}$ $A \cap (B \cap C) = \{4;6\}$

II. $A \cap B = \{2,4,6\}$ $(A \cap B) \cap C = \{4,6\}$

3. $B \subset A$ olduqda $A \cap B = B$ doğrudur. Xüsusi halda

$A \cap A = A,\ A \cap \varnothing =,\ A \cap J = A \quad (A \subset J)$ bərabərlikləri də doğrudur.

4. Distributivlik xassələri çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi arasındakı əlaqəni əks etdirir. İxtiyari *A, B* və *C* çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

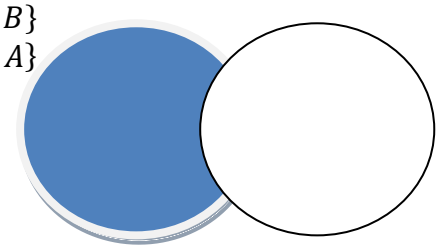
**3. Tərif.***A* çoxluğunun *B* çoxluğuna daxil olmayan bütün elementlərindən ibarət olançoxluğa *A* və *B* çoxluqlarının fərqi deyilir və *A* \ *B* kimi işarə edilir. Bu halda *B*-nin *A* çoxluğunun alt çoxluğu olması vacib deyildir.

İki çoxluğun fərqi simvolik olaraq aşağıdakı şəkildə yazılır:

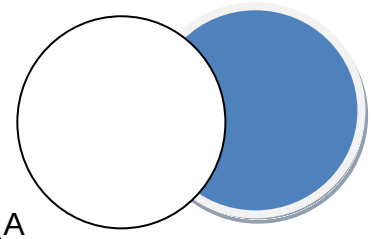
A\B = $\{x/x \in A, x \notin B\}$

B\A = $\{x/x \in B, x \notin A\}$

Şəkil.



A\B



B\A

Misal. *A* = {*1,2,3,4,5,6,7*} , *B* = {*2,5,7,8*} çoxluqlarının fərqi *C* = *A* \ *B* = {1,3,4,6}şəklində olur. Buradan görünür ki, *C* çoxluğunun hər bir elementi *A* çoxluğuna daxildir, lakin *B* çoxluğuna daxil deyil.

Ola bilər ki, *A* ∩ *B* = ∅ . Bu halda *A* \ *B* = *A* ,*B* \ *A* = *B* olur. Məsələn:

1. *A* = [3,4] , *B* = [7,12]. *Bu halda A* \ *B* = [3,4], *B* \ *A* = [7,12]

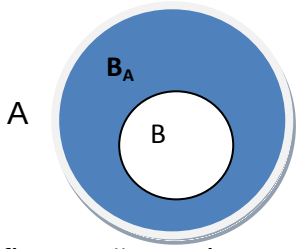
Çoxluqların fərqini çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi əmelləri ilə əlaqələndirən aşağıdakı bərabərliklər ixtiyari *A, B, C* çoxluqları üçün doğrudur:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

**Tərif.** Əgər xüsusi halda *B* çoxluğu *A* çoxluğunun alt çoxluğu olarsa ($B \subset A$) , onda *A* ilə *B*-nin fərqinə $A \setminus B$ , *B* çoxluğunun *A* çoxluğuna tamamlayıcısı deyilir və $B_A$ ilə işarə olunur.

Şəkil.




Çoxluqların fərqinin tərifinə uyğun olaraq, $B \subset A$ olduqda, A çoxluğundan B-nin elementlərini kənar etdikdən sonra alınan çoxluq B-nin A-ya qədər tamamlayıcısı olur.

Misal. $C = \{41,42\}$ $v$ $D = \{40,41,42,43,44\}$

$C'_D = \{40,43,44\}$ olur.

Qeyd edək ki, “tamamlama” əməliyyatının nəticəsi verilmiş çoxluğun hansı çoxluğa “tamamlanmasından” bilavasitə asılı olur. Məsələn: tam ədədlər çoxluğunu rasional ədədlər çoxluğuna tamamlayan – bütün kəsr ədədlər çoxluğudur. Əgər tam ədədlər çoxluğunun həqiqi ədədlər çoxluğuna tamamlanmasına baxırıqsa, onda kəsr və irrasional ədədlər

çoxluqlarının birləşməsi tamamlayıcı çoxluq olacaqdır.

**Mövzu 3. Çoxluqların Dekart hasili. Cəm və hasil qaydaları.**

Plan

1. Nizamlanmış cüt.
2. İki çoxluğun dekart hasili.
3. Cəm və hasil qaydaları.

**1.** Iki *a* və *b* elementlərinin müəyyən sırada düzülüşünə nizamlanmış cüt deyilir və (*a,b*) ilə işarə edilir. *a*- ya cütün birinci, *b*-yə isə ikinci elementi (komponenti, koordinatı) deyilir. Iki cüt o zaman bərabər hesab edilir ki, həmin cütlərin uyğun komponentləri bərabər olsun, yəni $a_1 = a_2$ , $b_1 = b_2$olduqda $(a_1 ,b_1) = (a_2 ,b_2)$ hesab edilir.Əgər $a \neq b$ *olarsa* $(a,b) \neq (b,a)$ olur. Tutaq ki, (*a,b*) nizamlanmış cütü $\frac{1}{4}$ kəsrinin surət və məxrəcini göstərir: (*a* = 1 , *b* = 4); *onda* (1,4) ≠ (4,1) olar.

**2**. Fərz edək ki, boş olmayan *A* və *B* çoxluqları verilmişdir. *A* çoxluğundan hər hansı bir *a* elementi götürüb, sonra ona *B* çoxluğunun müəyyən bir *b* elementini qoşmaqla (*a,b*) nizamlı cütünü quraq. Bu qayda ilə hər dəfə birinci yerdə *A* çoxluğunun elementlərini, ikinci yerdə isə B çoxluğunun elementlərini yazmaqla *A* və *B* çoxluqlarının bütün elementlərindən istifadə etməklə bütün nizamlı cütləri tərtib etmək olar. Nəticədə *A* və *B* çoxluqlarının elementlərindən düzəldilmiş nizamlı cütlərdən ibarət olan *C* çoxluğunu alırıq. Elementləri verilmiş *A* və *B* çoxluqlarının elementlərinin nizamlanmış (*x*, *y*) cütlərindən ibarət olan *C* çoxluğuna *A* və *B* çoxluqlarının düz hasili və ya dekart hasili deyilir. *A* və *B* çoxluqlarının dekart hasili *C* = *A*x*B* şəklində işarə edilir.

**<u>Tərif.</u>** İki sonlu çoxluğun Dekart hasili həmin çoxluqlara daxil olan ($x \in A, y \in B$) elementlərdən düzəlmiş bütün mümkün olan nizamlanmış cütlər $(x, y)$ çoxluğuna deyilir və simvolik olaraq $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Misal. Tutaq ki, iki *A* və *B* çoxluqları verilmişdir.

$A = \{2,4,6\};\ B = \{a, b, c\}$

Bu çoxluqların Dekart hasilini düzəldək.

$A \times B = \{(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b),(4,c),(6,a),(6,b),(6,c)\}$

Göstərmək olar ki, sonlu çoxluqların dekart hasilindəki cütlərin sayı *A* və *B* çoxluqlarında olan elementlərin sayını göstərən ədədlərin hasilinə bərabərdir. Fərz edək ki, *A* □□□*1,2,4,6*□□, *B* □□□*3,4,5*□□çoxluqları verilmişdir. Bu halda *A*x*B* düz hasilinin elementlərini yazaq:

*A*□×□*B*□□□□1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(2,4);(2,5);(4,3);(4;4);(4,5);(6,3);(6,4);(6;5)□□.

Göründüyü kimi *A*×□*B* çoxluğunda 12 nizamlanmış cüt var. *A* çoxluğunun 4, *B* çoxluğunun 3 elementi var, yəni *4* □□*3* □□*12*

**3.** Dekart hasilində assosativlik və komutativlik xassələri ödənilmir, yəni bu xassələrə malik deyil.

1) $A \neq B\ olduqda\ A \times B \neq B \times A$.

2) *A*,*B* və *C* çoxluqlarından heç biri boş çoxluq deyildirsə, onda

$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

*3)* İxtiyari A çoxluğu üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur

*A*×□□□□□□□□□× *A* □□□□.

4) Çoxluqların Dekart hasili əməli çoxluqların birləşməsi, kəsişməsi və fərqi əməllərinə əsasən aşağıdakı distrubutivlik xassələrinə malikdir.

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

**Misal**. $A=\{1,2,3\},\ B=\{c,d\},\ C=\{a\}$ olarsa $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ bərabərliyinin doğruluğunu göstərək.

$A\cup B=\{1,2,3,c,d\}$

$(A\cup B)\times C=\{1,2,3,c,d\}*\{a\}=\{(1,a),(2,a),(3,a),(c,a),(d,a)\}$

$(A\times C)\cup(B\times C)=\{(1,a),(2,a),(3,a)\cup(c,a),(d,a)\}=\{(1,a),(2,a),(3,a),(c,a),(d,a)\}$

Buradan $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ olar.

**Misal.** $A=\{a,b,c,d\},\ B=\{c,d\},\ C=\{a\}$ olarsa $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ bərabərliyinin doğruluğunu göstərək.

$$(A\cap B)\times C=\{(c,d)\}\times\{a\}=\{(c,a),(d,a)\}$$

$$(A\times C)\cap(B\times C)=\{(a,a),(b,a),(c,a),(d,a)\}\cap\{(c,a),(d,a)\}==\{(c,a),(d,a)\}$$

Buradan $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ olar.

**3**. Riyaziyyat kursunda elə məsələlərin həllinə baxılır ki, bu məsələlərdə sonlu çoxluqların birləşməsinə və kəsişməsinə daxil olan elementlərin sayını tə yin etmək lazım gəlir. Belə məsələlərin həllinin xüsusi priyomu var. Tutaq ki, iki çoxluq verilmişdir:

$$A=\{k,l,m\}\ v\ B=\{p,r,z\}$$

n(A)= 3, n(B) = 3 və $A\cap B=\emptyset$

n$(A\cup B)=3+3=6$ , çünki çoxluqların ortaq elementi yoxdur. Aşkardır A və B çoxluqlarının birləşməsində olan elementlərin sayı A və B çoxluqlarında olan elementlərin sayının cəminə bərabərdir . Yəni,

$$A\cap B=\emptyset\ olduqda,\quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

Bu düstur böyük praktik əhəmiyyətə malik olub, **cəm qaydası** adlanır.

Əgər verilmiş A və B çoxluqlarının kəsişməsi $A\cap B\neq\emptyset$ olarsa onda onların birləşməsində olan elementlərin sayı aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$A\cap B\neq\emptyset\ olduqda, n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

**Məsələ**. Sinifdə bir neçə şagird marka yığmaqla məşğul idi. 11 nəfər xarici ölkələrin, 15 nəfər keçmiş SSRİ-nin, 6 nəfər həm xarici ölkələrin, həm də keçmiş SSRİ-nin m markalarını yığırdı. Cəmi neçə şagird marka yığmaqlaqla məşğul idi?

Həlli: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=11+15-6=20$

**Məsələ.** Sinifdəki40 şagirddən 23 nəfəri riyaziyyat dərnəyində, 27 nəfəri ədəbiyyat dərnəyində iştirak edir. Həm riyaziyyat, həm də ədəbiyyat dərnəyində iştrak edən şagirdlərin sayını tapın.

Həlli: $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=23+27-40=10$

*Tutaq ki, A və B çoxluqları verilmişdir. Bu çoxluqların elementləri $A_1=\{a,b\},\ B=\{c,d\}$ olsun. İndi bu üç çoxluğun Dekart hasillərini düzəldək.

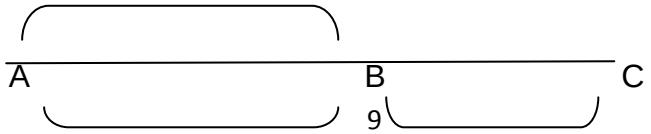
$A\times B=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$

$A\times B$ Dekart hasillərindəki elementlərin sayı həmin çoxluqların elementlərinin sayını göstərən ədədlərin hasilinə bərabərdir. Həqiqətən, A- in elementinin sayı 2, B-nin elementinin sayı 2-yə bərabərdir.

Beləliklə $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$ düsturunu alırıq.

Bu üsula **hasil qaydası** deyilir. Bu düstur iki sonlu çoxluğun Dekart hasilinə daxil olan mümkün cütlərin sayını tapmağa imkan verir. Əgər *a* elementini n üsulla, b elementini m üsulla seçmək olarsa, onda $(a,b)$ nizamlanmış cütünü $n\cdot m$ üsulla seçmək olar.

**Məsələ.***A* məntəqəsindən *B* məntəqəsinə üç yol gedir. *B*-dən *C*-yə isə iki yol gedir.*B* məntəqəsindən keçməklə *A*-dan *C*-yə neçə üsulla getmək olar? Məsələni həll etmək üçün *A*-dan *B*-yə gedən yolları □□,□□,□□□ilə, *B*-dən *C*-yə gedən yolları isə a və b ilə işarə edək.



Onda *A*-dan *B*-yə gedən hər bir üsul bir cüt göstərir. Bu cütlər aşağıdakılardır: □□□,*a*□,□□□,*a*□,□□□,*a*□,□□□,*b*□,□□□,*b*□,□□□,*b*□. Aydındır ki, alınan cütlər çoxluğu *A*-dan *B*-yə gedən yollar çoxluğu $A_1$□□□□□,□□,□□□□ilə *B*-dən *C*-yə gedən yollar çoxluğunu $A_2$□□□*a,b*□□-nin dekart hasilini göstərir. *Hasil qaydasına əsasən n*□$A_1$×□$A_2$□□□*n*□□$A_1$□×□*n*□$A_2$) *n*□$A_1$□□□□*3* və *n*□$A_2$□□□□*2* olduğuna görə *n*□$A_1$×$A_2$□□□□*6* olar. Deməli, *A*məntəqəsindən *C* məntəqəsinə (*B*-dən keçməklə) 6 üsulla getmək olar.

## Mövzu 4. Mülahizə anlayışı. Mülahizələr üzərində məntiqi əməllər.

Plan

1. Riyazi məntiqin inkişafı haqqında qısa məlumat.
2. Mülahizə anlayışı. Mülahizələrin növləri.
3. Mülahizələrin inkarı, konyunksiyası və dizyunksiyası.
4. Mülahizələrin implikasiyası və ekvivalensiyası.

1. Məntiq – insan təfəkkürünün qanun və formaları haqqında elmdir. Məntiq sərbəst bir elm kimi hələ bizim eradan əvvəl yunan filosofu Aristotelin əsərlərində (b.e. əvvəl 384-322-ci illər) formalaşdırılmışdır. Aristotel o zamana qədər məlum olan məlumatları sistemləşdirdi və bu sistem sonralar formal məntiq, yaxud da onun şərəfinə Aristotel sistemi adlandırıldı. Uzun müddət formal məntiq nəzəriyyəsində xüsusi diqqət çəkən dəyişikliklər baş vermədi. Riyaziyyat elminin sonrakı inkişaf prosesi təbii olaraq Aristotel məntiqi nəzəriyyəsinin çatışmamazlığını üzə çıxardı və bu nəzəriyyənin gələcək inkişaf tələbini qarşıya qoydu. Məntiq nəzəriyyəsinin riyazi əsasda qurulması haqqında ideyanı tarixdə ilk dəfə XVII əsrin sonunda alman riyaziyyatçısı H.Leybnits (1646-1716) təklif etmişdi. O hesab edirdi ki, məntiqin əsas anlayışları, xüsusi qaydalarla birləşdirilmiş simvollarla işarə edilməlidir. Bununla da istənilən mühakiməni müəyyən məntiqi dusturlar üzərində hesablama prosesi ilə əvəz etmək imkanı yaranacaqdır. O demişdir: “Biz işarələri yalnız öz fikrimizi başqalarına çadirmaq üçün deyil, həmçinin öz düşünmə prosesimizin yüngülləşdirilməsi üçün istifadə edirik” (Leybnits). Leybnitsin ideyalarının həyata keçirilməsi ilk dəfə ingilis alimi C.Bula (1815-1864) nəsib olmuşdur. O, mülahizələri hərflərlə işarə edərək, yeni bir cəbr yaratdı ki, bu da mülahizələr cəbrinin yaranmasına gətirib çıxardı. Məntiq nəzəriyyəsində simvolik işarələmələrin daxil edilməsi, riyaziyyatda hərfi işarələmələrin oynadığı rol qədər həlledici əhəmiyyətə malik oldu. Məhz simvolların daxil edilməsi riyazi məntiq elminin yaradılmasının əsasını qoydu. XIX yüzilliyin sonunda məntiq nəzəriyyəsinin anlayış və ideyalarının əsaslandırılması məsələsi riyaziyyatçılar üçün maraq kəsb etməyə başladı. Bu sahədə alman riyaziyyatçısı H.Freqenin (1848-1925) və italyan riyaziyyatçısı D.Peanonun (1858-1932) əsərləri xüsusilə fərqlənir, belə ki, onlar riyazi məntiqi, hesab elminin və çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsaslandırılması üçün tətbiq etdilər.

2.**Tərif**. Riyazi məntiqdə istənilən doğru və ya yalan fikri ifadə edən təklifə (nəqli cümləyə) mülahizə deyilir. Mülahizə dedikdə zaman və məkanın verilmiş şərtində ***doğru***, yaxud ***yalan*** ola biləcək bir fikri ifadə edən nəqli cümlə başa düşülür. Mulahizələr ***doğru***, yaxud ***yalan*** kimi məntiqi qiymətlər alır. Məsələn, “2x2=4”, yaxud, “Bakı şəhəri Azərbaycan Respublikasının paytaxtıdır” cümlələri mülahizələrdirlər, “Saat neçədir?”, yaxud “6x+14x+22=0 tənliyini həll edin.” cümlələri isə mülahizə deyildir. Mülahizələr ***doğru***, yaxud ***yalan*** kimi məntiqi qiymətlərdən yalnız birini alır, yəni, heç bir mülahizə eyni zamanda həm ***doğru***, həm də ***yalan*** kimi məntiqi qiymətlər ala bilməz. Bir neçə mülahizə nümunələrinə baxaq:

1) Bakı şəhəri Xəzər dənizinin sahilində yerləşir.
2) Moskva – İngiltərənin paytaxtıdır.
3) Qurbağa balıq deyil.
4) 6 ədədi 2-yə və 3-ə bölünür.
5) 33 ədədi sadə ədəddir.
6) Əgər a müsbət həqiqi ədəddirsə, onda a ədədinin modulu özünə bərabərdir.

1), 3), 4), 6) mülahizələri ***doğru***, 2),5) mülühizələri isə ***yalan*** mülahizələrdir. Qeyd edək ki, hətta bitmiş bir fikri ifadə edən istənilən nəqli cümlə mülahizə olmaya bilər. Məsələn, “Yaşasın vətənin qəhrəman övladları!” cümləsi mülahizə deyildir. Çünki bu cumlə ***doğru***, yaxud ***yalan*** kimi məntiqi qiymət ala bilmir. Abstrakt şəkildə verilmiş “x ədədi 2-

yə bölünür” cümləsi də bu mənada mülahizə deyildir, belə ki, x ədədinin tək və ya cüt ədəd olması haqqında heç bir məlumatımız olmadığından bu təklifin doğru və ya yalan olması haqqında heç bir fikir söyləyə bilmərik. Mülahizələr sadə və mürəkkəb olur. Məsələn yuxarıda qeyd olunan 1), 2) və 5) mülahizələri sadə mülahizələrdir. Sadə mülahizələrdən, onları “deyil”, “və”, “və ya”, “əgər ..., onda ...”, “onda və yalnız onda” və s. qramatik bağlayıcıları vasitəsi ilə əlaqələndirilməklə alınan yeni mülahizələrə ***mürəkkəb*** mülahizələr deyirlər. Məs. 3), 4) və 6) mülahizələri mürəkkəb mülahizələrdir, belə ki, 3) mulahizəsi “qurbağa balıqdir” mülahizəsindən “deyil” inkarı vasitəsi ilə alınmışdır, 4) mulahizəsi isə “6 ədədi 2-yə bölünür” və “6 ədədi 3-ə bölünür” mülahizələrindən “və” bağlayıcısı vasitəsi ilə əlaqələndirilməklə alınmışdır, 6) mulahizəsi isə “a müsbət ədəddir” və “a ədədinin modulu özünə bərabərdir” mülahizələrindən “əgər ..., onda ...” bağlayıcısı vasitəsi ilə qurulmuşdur.

Mülahizələr latın əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə olunur. Doğru məntiqi qiyməti D hərfi ilə, yalan məntiqi qiyməti Y hərfi ilə işarə olunur.

**3**. A hər hansı mülahizə olduqda və bu mülahizəni inkar etdikdə biz yeni bir mülahizə almış oluruq. Bu yeni mülahizə verilmiş A mülahizəsinin inkarı olur və “$\overline{A}$” və kimi işarə edilir.

**Tərif**. A mülahizəsi doğru olduqda yalan olan, A mülahizəsi yalan olduqda isə doğru olan mülahizəyə A mülahizəsinin inkarı deyilir. Məsələn: A- “5 ədədi natural ədəddir” mülahizəsi olduqda, “5 ədədi natural ədəd deyil” mülahizəsi onun inkarıdır. Bu mülahizələri qısaca olaraq belə yazmaq olar: A- $5 \in N$, $\overline{A} - 5 \notin$ N.

Mülahizələrin inkarına aid aşağıdakı doğruluq cədvəlini verə bilərik:

| A | $\overline{A}$ |
|---|---|
| D | Y |
| Y | D |

Cədvəldən görünür ki, A mülahizəsi doğru olduqda onun inkarı $\overline{A}$ yalan, A mülahizəsi yalan olduqda onun inkarı doğru olur. Bundan əlavə inkaredici mülahizənin özünü də inkar etmək olar. A mülahizəsinin ikiqat inkarı $\overline{\overline{A}}$ ilə işarə edilir. Əgər verilmiş mülahizə doğrudursa, onda onun ikiqat inkarı da doğru, əgər yalandırsa, onda onun ikiqat inkarı da yalandır.

Məsələn: A-“2 cüt ədəddir” mülahizəsinin inkarı $\overline{A}$- “2 cüt ədəd deyil” mülahizəsi olduqda, $\overline{\overline{A}}$ – “doğru deyil ki, 2 cüt ədəd deyil” mülahizəsi A mülahizəsinin ikiqat inkarıdır.

A mülahizəsi onun inkarı və ikiqat inkarı arasında olan münasibəti aşağıdakı cədvəl vasitəsilə göstərək:

| A | $\overline{A}$ | $\overline{\overline{A}}$ |
|---|---|---|
| D | Y | D |
| Y | D | Y |

*Mülahizələrin konyunksiyası.* A və B iki sadə mülahizə olsun. Bu mülahizələri “və ” bağlayıcısı vasitəsilə bir-birinə bağladıqda məntiqi quruluşu “A və B” kimi olan yeni bir mürəkkəb mülahizə alırıq.

Məsələn: A- “15 tək ədəddir”, B-“ 15 ədədi 3-ə bölünür” olduqda A və B mülahizələri belə oxunur: “15 ədədi təkdir və 3-ə bölünür”. Və bağlayıcısı riyazi məntiqdə konyunksiya əməli adlanır və "$A \wedge B$" kimi işarə edilir. Qeyd edək ki, “konyunksiya” termini “ conjunctio” latın sözündən alınmışdır “əlaqə” mənasını verir.

**Tərif 1.** A və B mülahizələrinin “və” bağlayıcısı ilə birləşməsindən alınan mürəkkəb mülahizəyə bu mülahizələrin konyunksiyası deyilir.

**Tərif 2.** A və B mülahizələrinin yalnız hər ikisi doğru olduqda doğru, qalan hallarda isə yalan olan mürəkkəb mülahizəyə A və B mülahizələrinin konyunksiyası deyilir.

Bu tərif, A və B mülahizələrinin doğruluq qiymətləri verildikdə konyunksiya nəticəsində alınan yeni "$A \wedge B$" mürəkkəb mülahizəsinin doğruluq qiymətlərini təyin etmək qaydasını çıxarmağa imkan verir. Ümumiyyətlə, konyunksiya nəticəsində alınan yeni "$A \wedge B$" mürəkkəb mülahizəsinin doğruluq qiymətlərini təyin etmək mülahizələrin konyunksiyalarının doğruluq qiymətləri cədvəlini yadda saxlamaq lazımdır:

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| D | D | D |
| D | Y | Y |
| Y | D | Y |
| Y | Y | Y |

Mülahizələrin konyunksiyasının tərifinə əsasən konyunksiya əməli üçün aşağıdakı məntiq qanunları doğrudur:

1)Kommutativlik qanunu: $A \wedge B = B \wedge A$

2) Assosiativlik qanunu: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

3) $A \wedge A = A$

4) $A \wedge i = Ai$- ixtiyari doğru mülahizədir.

5) $A \wedge \emptyset = \emptyset \varnothing$- ixtiyari yalan mülahizədir.

*Mülahizələrin dizyunksiyası.* Məlumdur ki, mürəkkəb mülahizə bağlayıcılar vasitəsilə sadə cümlələrin birləşməsindən əmələ gəlir. “Və ya” və bəzən “yaxud” bağlayıcılar vasitəsilə alınan mürəkkəb mülahizə **mülahizələrin dizyunksiyası** adlanır. Qeyd edək ki, dizyunksiya termini latın sözü olub “ayırmaq” mənasını verir.

Məsələn 1. “Biz yayda dağa gedirik və ya dənizə yollanırıq”

2. “Mən kitab oxuyuram, yaxud kinoya baxıram”

**Tərif 1.** A və B mülahizələrin “və ya” bağlayıcısı ilə birləşdirilməsindən alınan mürəkkəb mülahizəyə A və B mülahizələrinin dizyunksiyası deyilir və “ $A \vee B$ ” kimi işarə edilir.

**Tərif 2.** A və B mülahizələri yalnız eyni zamanda yalan olan, qalan bütün hallarda doğru olan mürəkkəb mülahizəyə A və B mülahizələrinin dizyunksiyası deyilir.

Bu tərif A və B mülahizələrinin doğruluq qiymətləri verildikdə onların dizyunksiyasının nəticəsinin doğruluq qiymətlərini təyin etməyə imkan verir.

<u>Misal 1.</u> Tutaq ki, mülahizələr riyazi şəkildə verilmişdir.

A- “$9 > 15$”

B- “$9 = 15$”

Bu mülahizələrin dizyunksiyası “$9 \geq 15$” kimi olar. Bu belə “A və ya B” olur.

“$9 > 15$ və ya $9 = 15$” $\Rightarrow$ “$9 \geq 15$”

Tərifdən aydın olur ki, bu mülahizələrin hər ikisi yalandır. Onda onların dizyunksiyası da yalandır.

Mülahizələrin dizyunksiyasının doğruluq qiymətləri cədvəlli aşağıdakı kimidir:

| *A* | *B* | $A \vee B$ | $B \vee A$ |
|---|---|---|---|
| *D* | *D* | *D* | *D* |
| *Y* | *D* | *D* | *D* |
| *D* | *Y* | *D* | *D* |
| *Y* | *Y* | *Y* | *Y* |

Dizyunksiya əməli üçün aşağıdakı məntiq qanunları doğrudur:

1. Kommutativlik qanunu $A \vee B = B \vee A$
2. Assosiativlik $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
3. $A \vee A = A$

4. $A \vee i = i$ *i*- ixtiyari doğru mülahizədir.
5. $A \vee \varnothing = A$ $\varnothing$- ixtiyari yalan mülahizədir.

**4.** Bəzən sadə mülahizələrdən "əgər,...onda..." bağlayıcısı vasitəsilə mürəkkəb mülahizələr düzəldilir. Məsələn, "Əgər 44 ədədi 8-ə bölünürsə, onda o 4-ə bölünür", "əgər 15 ədədi 5-ə bölünürsə, onda onun sonuncu rəqəmi 5-ə bölünür", "əgər xəstə olaramsa, onda dərsə getməyəcəm". Belə mürəkkəb mülahizələrin sadə mülahizələrini A və B ilə göstərsək, onda qısa olaraq "əgər A varsa, onda B- də var" olur.

Mürəkkəb mülahizənin "əgər A varsa, onda B- də var" forması mürəkkəb mülahizənin implikasiyası adlanır. Qeyd edək ki, implikasiyası termini latınca "implikoto" sözündən götürülmüşdür və "sıx əlaqələndirmək" mənasını veririr.

**Tərif 1**. İki A və B mülahizələrinin "əgər A varsa, onda B- də var" şəklində əlaqələndirilməsi nəticəsində alınan mürəkkəb mülahizəyə bu mülahizələrin implikasiyası deyilir və $A \Rightarrow B$ kimi yazılır.

**Tərif 2.** Yalnız A mülahizəsi doğru, B mülahizəsi yalan olduqda yalan, qalan bütün hallarda doğru olan mürəkkəb mülahizəyə A və B mülahizələrinin implikasiyası deyilir.

Mülahizələrin implikasiyasında A mülahizələrin şərti B isə nəticəsi adlanır.. Yalnız A doğru, B yalan olduğu halda implikasiya yalan, qalan hallarda isə implikasiya doğru olur.

Məsələn. A- "12 ədədi 4-ə bölünür" – doğru

B- "12 ədədi 2-ə bölünür" – doğru

$A \Rightarrow B$ "Əgər 12 ədədi 4-ə bölünürsə, onda 12 ədədi 2-ə də bölünür" Hər ikisi doğru $A \Rightarrow B$ doğrudur.

Mülahizələrin implikasiyasını cədvəl vasitəsilə əks etdirək.

| *A* | *B* | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| *D* | *D* | *D* |
| *D* | *Y* | *Y* |
| *Y* | *D* | *D* |
| *Y* | *Y* | *D* |

Verilmiş A və B mülahizələrinin implikasiyasını yazaq. $A \Rightarrow B$ Burada A şərt, B isə nəticədir. Əgər şərt ilə mülahizənin yerini dəyişsək, onda implikasiya $B \Rightarrow A$ kimi olar. Məsələn. "Aynur 1-ci sinfə gedir" "Aynurun 6 yaşı var" mülahizələrinin implikasiyası "Əgər Aynur 1-ci sinfə gedirsə, onda onun 6 yaşı var" kimi olar. Şərt ilə nəticənin yerini dəyişsək, onda implikasiya belə olar. "Əgər Aynurun 6- yaşı varsa, onda o 1- ci sinfə getməlidir" implikasiyası alınır. Burada $B \Rightarrow A$ , $A \Rightarrow B$- nın tərsi adlanır, iki qarşılıqlı tərs implikasiya alınır. Bu implikasiyaların konyuksiyasını yazaq $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Bu A və B mülahizələrinin ekvivalensiyası adlanır və $A \Leftrightarrow B$ kimi göstərilir.

**Tərif 1.** İki A və B mülahizələri bir-birilə "A onda və yalnız onda olur ki, B olsun" şəklində bağlandıqda, alınmış yeni mürəkkəb mülahizəyə onların ekvivalensiyası deyilir və $A \Leftrightarrow B$ kimi işarə edilir.

**Tərif 2**. Yalnız A və B mülahizələrinin hər ikisi eyni zamanda doğru və ya yalan olduqda doğru, qalan hallarda isə yalan olan mürəkkəb mülahizə ekvivalensiya adlanır. $A \Leftrightarrow B$ yazılışı belə oxunur. "A onda və yalnız onda, olur ki, B olsun"

Məsələn. A-" ədədin rəqəmləri cəmi 3-ə bölünür" B-" ədəd 3-ə bölünür"

$A \Leftrightarrow B$ - "Ədəd onda və yalnız onda 3-ə bölünür ki, onun rəqəmlərinin cəmi 3-ə bölünmüş olsun".

| *A* | *B* | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| *D* | *D* | *D* |
| *Y* | *Y* | *D* |
| *Y* | *D* | *Y* |
| *D* | *Y* | *Y* |

| *A* | *B* | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|
| *D* | *D* | *D* | *D* | *D* |
| *Y* | *Y* | *D* | *D* | *D* |
| *Y* | *D* | *D* | *Y* | *Y* |
| *D* | *Y* | *Y* | *D* | *Y* |

## Mövzu 5. Anlayışlar. Anlayışın məzmunu və həcmi. Anlayışın tərifi.

*Plan:*

1. *Anlayışın məzmunu və həcmi*
2. *Anlayışın tərifi.*
3. *Anlayışın cinsi və növü.*

Biz daima təbiətlə təmasda olub, müxtəlif cisim və hadisələrlə tanış oluruq. Bu cisim və hadisələr bir-birinə oxşar və fərqli olurlar. Bu zaman bizdə cisim və hadisələr haqqında təsəvvürlər yaranır.Bu təsəvvürlər isə get-gedə anlayışlara çevrilir. Cisim və hadisələr isə əlamətlərinə görə bir-birindən fərqlənir. Onda anlayışı belə ifadə etmək olar. Anlayış öyrənilən obyektin mühüm (fərqləndirici) xassələrinin inikas olunduğu təfəkkür formasıdır. Əgər anlayış real aləmdə mövcud olan obyektlərin inikasından ibarətdirsə, onda anlayış düzgün anlayış adlanır.

Anlayışlar cisim və hadisələrin əsas əlamətlərini göstərən fikirlərdir. Əlamətlər müxtəlif olduğu kimi onun anlayışlar sistemidə müxtəlif olur. Belə ki, astronomiyanın öz anlayışlar sistemi, fizikanın öz anlayışlar sistemi,riyaziyyatın isə öz anlayışlar sistemi vardır.

Məsələn, riyazi anlayışlara aşağıdakıları göstərmək olar: “çoxluq”, “müstəvi”, “düz xətt”, “məsafə”, “bucaq”, “dördbucaqlı” və s.

Hər bir anlayışın iki cəhəti vardır.

1. Anlayışın məzmunu
2. Anlayışın həcmi.

**Tərif** 1. Anlayışın əhatə etdiyi əlamətlər çoxluğuna onun məzmunu deyilir.
**Tərif** 2. Anlayışın əhatə etdiyi obyektlər çoxluğuna onun həcmi deyilir.
Məsələn «paraleloqram» anlayışının məzmununu aşağıdakı mühüm xassələr təşkil edir: 1) qarşı tərəflərin bərabərliyi;2) qarşı bucaqların bərabərliyi; 3) diaqonalların kəsişmə nöqtəsində hər bir diaqonalın yarıya bölünməsi və s. «Paraleloqram» anlayışının həcmini isə aşağıdakı fiqurlar təşkil edir: 1) paraleloqramlar; 2) romblar; 3) düzbucaqlılar; 4) kvadratlar.

Məsələn, natural ədədlər çoxluğunda sadə ədədlər, mürəkkəb ədədlər, 3,4,5 və 25-ə bölünmə əlamətlərinə aid ədədlər və s. əlamətlər natural ədədlər anlayışının məzmunu əhatə edir.
Üçbucaq anlayışında – üc tərəfin, üc bucağın, hündürlüyün, medianın, tənbölənin, daxili bucaqların cəminin $180^0$ olması və s. onun məzmunudur.

Anlayışın həcmi:
Məsələn, düzbucaqlı, itibucaqlı, korbucaqlı, üçbucaqlar üçbucaq anlayışının həcmidir. Elə anlayışlar vardır ki, bu anlayış anlayışın məzmununa daxil olanlarının əsasını təşkil edir.Məsələn, üçbucağın əsas əlaməti onun üç tərəfinin və üç bucağının olmasıdır; paraleloqramın qarşı tərəflərinin paralel və bərabər olması onun əsas əlamətidir; düzbucaqlının bütün bucaqlarının düz bucaq və qarşı tərəflərin paralel və bərabər olması onun əsas əlamətidir.

Anlayışın məzmununa yeni əlamət daxil etməklə, o ümumi anlayışdan daha az olan anlayışa keçilir ki, bunada **məhdudlaşdırma** deyilir.

Məsələn, ədəd anlayışında həqiqi ədədlər çoxluğu daha ümumi anlayışdır.

Məhdudlaşdırma vasitəsilə alınan yeni anlayışa növ deyilir.

Məsələn, “tək ədədlər”, “cüt ədədlər” növdür. Məhdudlaşdırılan anlayışa cins deyilir. Məsələn natural ədədlər çoxluğu.

Ümumi şəkildə: 1. “Üçbucaq” anlayışı cins, bərabəryanlı, korbucaqlı, itibucaqlı, düzbucaqlı üçbucaqların növüdür.

2. “Dördbucaqlı” - cins

Kvadrat, paraleloqram, romb, trapesiya - növdür.

MOTƏ-lər anlayışını göstərək. Onun növləri aşağıdakılardır.

1. Sadə ədədlər
2. Mürəkkəb ədədlər
3. Sıfır
4. Vahid

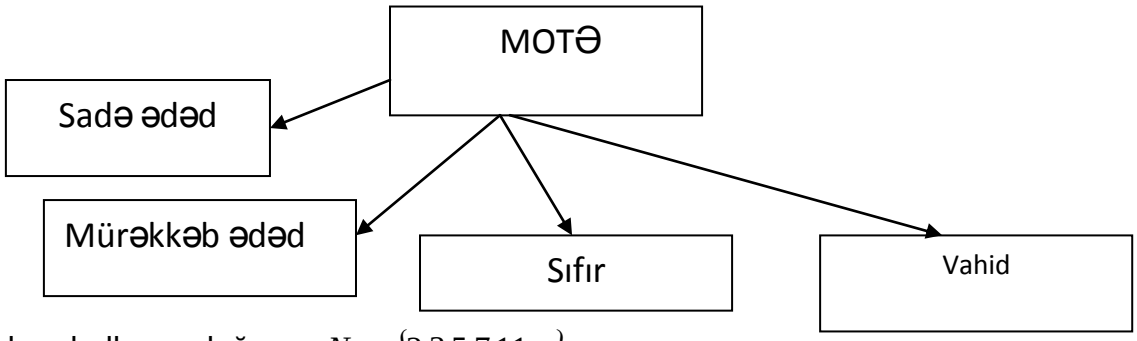
Natural ədədlər anlayışının bölgüsü:

2. Sadə ədəd
3. Mürəkkəb ədəd
4. Vahid

Rasional ədəd anlayışının bölgüsü:

1. Sadə ədəd
2. Mürəkkəb ədəd
3. Mənfi ədəd
4. Kəsr ədəd
5. Sıfır
6. Vahid

Mənfi olmayan tam ədəd anlayışının bölgüsünü aşağıdakı kimi aparmaq olar:




Sadə ədədlər çoxluğu: $N_1 = \{2,3,5,7,11,...\}$

Mürəkkəb ədədlər çoxluğu: $N_2 = \{4,6,8,10,12,.....\}$

Vahid ədəd: $N_3 = \{1\}$

Sıfır ədəd: $N_4 = \{0\}$

Anlayışın hər biri ayrılıqda zəruri, hamısı birlikdə kafi olan bütün əlamətlərinin (xassələrinin) əlaqəli cümlələr şəklində təsviri (ifadəsi) anlayışın tərifi adlanır. Anlayışların formalaşdırılması prosesində onların şifahi və ya yazılı ifadə edilməsi həmin anlayışı birmənalı ifadə etməlidir. Buna görə də, anlayışın tərifinə daxil olan hər bir əlamət zəruridir və bu əlamətlərin hamısı birlikdə anlayışı müəyyən etmək üçün kafidir. Anlayışa tərif verilməsi şərti qəbul olunsa da, əslində hər bir tərif real aləmdəki obyektlərin əlamətlərini ifadə edir və bu da müxtəlif obyektləri bir-birindən fərqləndirməyə, onları müəyyən əsasa görə təsnif etməyə imkan verir.

Riyaziyyatda elə anlayışlar var ki, onlara tərif verilmir və ya tərifsiz qəbul edilir. Belə anlayışlara ilk anlayışlar deylir (məsələn, düz xətt, müstəvi vəs.). Anlayışın tərifinə aşağıdakı tələblər verilir:

1. Anlayışın tərifində onun əsas məzmunu açılmalıdır;
2. Anlayışın tərifində artıq söz və ya çatışmayan söz olmamalıdır;
3. Anlayışın tərifində naməlum söz və ya simvol olmamalıdır.

Konkret misal göstərək:

1) Bütün tərəfləri bərabər olan düzbucaqlıya kvadrat deyilir.

2) Bütün tərəfləri bərabər və bucaqları düz olan paraleloqrama kvadrat deyilir.

Sonuncu tərif əlverişli deyil, çünki kvadrat anlayışına ən yaxın cins düzbucaqlı və rombdur. Aşkardır ki, anlayışa tərifin verilməsi qabaqcadan müəyyən hazırlıq tələb edir. Belə ki, tərifdə istifadə olunan mücərrəd anlayışlar məlum olmalıdır. Qeyd edək ki, heç

bir anlayışın tərifi isbat olunmur. Riyazi mühakimə və isbatlarda anlayışların tərifinə istinad edilir.

## Mövzu 6. Münasibət anlayışı. İki və eyni ədədi çoxluğun elementləri arasındakı binar münasibətlər.

Plan

1. Münasibət anlayışı.
2. İki sonlu çoxluğun elementləri arasında binar münasibətlər.
3. Eyni çoxluğun elementləri arasında binar münasibətlər.

1. Riyaziyyatda təkcə obyektlərin özləri deyil, həmçinin onlar arasında mümkün əlaqələr, münasibətlər öyrənilir. Çünki obyektlər haqqında anlayışların dərk edilməsi prosesi, obyektlər arasında qarşılıqlı əlaqələrin öyrənilməsi deməkdir. Doğrudan da, çoxluqlar nəzəriyyəsi əsasən çoxluqların xassələrini və onlar üzərində əməlləri öyrənir və bu zaman elementlərin təbiəti, onların verilmə üsulları nəzərə alınmır. Bu da çoxluqlar nəzəriyyəsinin praktik məsələlərə tətbiq edilə bilməsi üçün kifayət deyil. Bunun üçün elə çoxluqlara baxmaq lazım gəlir ki, onların elementləri arasında bu və ya digər münasibətlər təyin olunmuş olsun. Məsələn, ədədi çoxluqların elementləri arasında "böyükdür", "kiçikdir", "bərabərdir", "bölünəndir" və s. münasibətləri öyrənmədən bu çoxluqların nəinki praktik məsələlərdə tətbiqləri, hətta onların özlərinin tam dərk edilməsi mümkün deyil.

Münasibət anlayışını ümumi şəkildə təyin etməzdən əvvəl bəzi həyati məsələlərə baxaq. Verilmiş hərbi briqadanın zabitlər çoxluğunda hər hansı (a,b) elementlər cütü üçün "a zabiti b zabiti ilə eyni bölükdə qulluq edir", digər cütlər üçün "a zabiti rütbəcə b zabitindən böyükdür" kimi təkliflər doğru ola bilər. Bu misalların hər biri zabitlər çoxluğunda iki a və b zabiti arasında hər hansı münasibətin həmişə mövcud olduğunu göstərir.

Tutaq ki, $X = \{3,4,5,6,8\}$ çoxluğunun elementləri arasında "böyükdür" münasibəti verilmişdir: $4 > 3, 5 > 3, 5 > 4, 6 > 3, 6 > 4, 6 > 5, 8 > 3, 8 > 4, 8 > 5, 8 > 6$.

1) "Böyükdür" münasibətinin cütlərini yazaq:

$$\{(4;3),(5;3),(5;4),(6;3),(6;4),(6;5),(8;3),(8;4),(8;5),(8;6)\}$$

2) "1 vahid böyükdür" münasibətinin cütlərini yazaq: $\{(4;3),(5;4),(6;5)\}$

3) " 2 dəfə kiçikdir" münasibətinin cütlərini yazaq: $\{((3;6),(4;8))\}$

**2.** İki çoxluğun elementləri arasında da müxtəlif xarakterli münasibıtlər ola bilər. Qeyd edək ki, iki müxtəlif çoxluq arasındakı münasibəti çox vaxt "uyğunluq" da adlandırırlar. Məsələn, zabitlər çoxluğunun elementləri ilə hərbi briqadalar çoxluğunun elementləri arasında "a zabiti b briqadasında qulluq edir" kimi münasibət uyğunluğa misal ola bilər . Belə çoxluqların elemntləri arasında "mənsub olmaq", "aid olmaq" və s. xarakterli münasibətlər mövcuddur.

Məsələn, A={$\square li, Samir, Sevda\}$ $t\square l\square b\square l\square r$ *çoxluğu,*
$B = \{Bakı, G\square nc\square, Q\square b\square l\square, Qax\}$ şəhərlər çoxluğu olsun. Bu iki çoxluğun elementləri arasında "a tələbəsi b şəhərindəndir" münasibətini təyin edək. Aşkardır ki, bu şəkildə təyin olinmuş münasibət A və B çoxluqlarının elementləri arasında (tələbə, şəhər) cütü vasitəsilə təyin olunur. Bu cütlərdən tələbənin şəhərlərdən hansında olduğunu göstərən cütləri seçək. Bu iki çoxluq arasında mümkün cütləri cədvəl şəklində göstərək:

| A \ B | Bakı | Gəncə | Qəbələ | Qax |
|---|---|---|---|---|
| Əli | | | | |
| Samir | | | | |

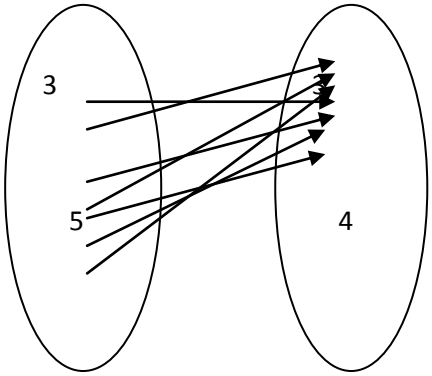
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sevda | | | | |

Aşkardır ki, cədvəldəki bütün damaların sayı A və B çoxluqlarından düzələ bilən bütün mümkün cütlərin sayına bərabərdir. Başqa sözlə bütün damaların sayı bu çoxluqların $A \times B$ dekart hasilərinin elementlərinin sayına bərabərdir. Xətlənmiş sahələr isə bu damaların elələridir ki, uyğun (tələbə, şəhər) cütü arasında "a tələbəsi b şəhərindəndir" münasibətini təyin edir. Göründüyü kimi bütün damaların sayı 12-yə, xətlənmiş damaların sayı isə 3-ə bərabərdir. De `məli, iki çoxluğun elementləri arasında hər hansı münasibət, çoxluqların dekart hasili olan bütün mümkün cütlərlər çoxluğunun altçoxluğudur. Bu çoxluğu P ilə işarə etsək onda $P \subset A \times B$ olar. Beləliklə, aydın olur ki, A və B çoxluqlarının elementləri arasındakı münasibət P, A, B çoxluqlar üçlüyü ilə təyin olunur.

**Tərif.** $P \subset A \times B$ olduqda $(P, A, B)$ üçlüyünə *A* və *B* çoxluqlarının elementləri arasındakı münasibətə **Binar münasibət** deyilir. Binar latın sözü olub ("bis") "ikiqat" deməkdir.

Münasibətlərə aid yazılışın sadə olması üçün binar münasibətlərini $\rho = (P, A, B)$ kimi işarə edirlər. A çoxluğunun ixtiyari x elementi ilə B çoxluğunun ixtiyari y elementi arasında binar münasibəti $x\rho y$ şəklində yazılır. $x\rho y$ yazılışı (x,y) cütünün $A \times B$ dekart hasilinin alt çoxluğuna daxil olduğunu göstərir.

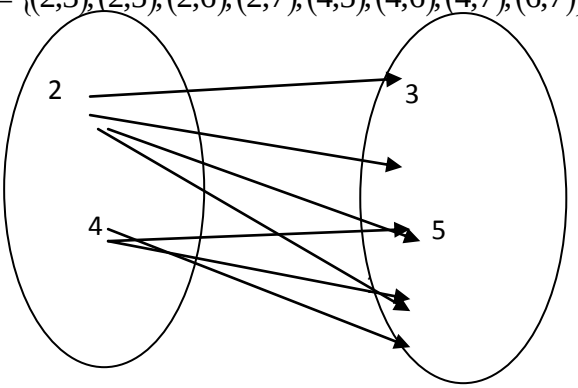
Tutaq ki, $A = \{3,5,6,8\}$ və $B = \{3,4,7,14\}$ çoxluqlarının elementləri arasında $\rho(\rho | x > y)$ münasibəti verilmişdir. $P = \{(5;3),(5;4),(6;3),(6;4),(8;3),(8;4),(8;7)\}$ olar.




Burada $\rho$ münasibətini ödəyən çütlərin birinci komponetlərindən düzələn çoxluq $A_1 = \{5;6,8\}$, ikinci komponetlərdən düzələn çoxluq $B_1 = \{3,4,7\}$ olar. P çoxluğuna daxil olan cütlərin birinci komponentləri çoxluğun $\rho$ münasibətinin təyin oblastı, ikinci komponentləri isə çoxluğun dəyişmə oblastıdır adlanır. P çoxluğuna $\rho$ münasibətinin qrafiki deyilir. Təyin oblastı ilə dəyişmə oblastı üst-üstə düşdükdə, deməli $\rho$ münasibəti hər yerdə təyin olunub.

Misala yenə müraciət edək.

Tutaq ki, $A = \{2,4,6\}$ və $B = \{3,5,6,7\}$ çoxluqları arasında $\rho(\rho | x < y)$ münasibəti verilmişdir. $P = \{(2;3),(2;5),(2;6),(2;7),(4;5),(4;6),(4;7),(6;7)\}$ olar. Bu münasibətin qrafını quraq.



**3.** İki müxtəlif çoxluqlar arasında binar münasibəti nəzərdən keçirdik. Verilmiş A və B çoxluqları üst-üstə düşə bilər, yəni A=B. Deməli, bu zaman artıq eyni bir çoxluğun elementləri arasındakı mümkün münasibətlərdən danışmaq olar və binar münasibət bu halda sadəcə çoxluq üzərində binar münasibət adlanır. Bu halda A çoxluğunun elementləri arasındakı binar münasibəti A çoxluğunun A$\times A$ Dekart hasilinin alt çoxluğu olan $P \subset A \times A$ ilə təyin olunur yəni (A,P) cütü ilə təyin olunur. Beləliklə, çoxluq üzərində binar münasibəti qısaca aşağıdakı tərif şəklində xarakterizə etmək məqsədəuyğundur:

**Tərif.** $P \subset A \times A$ olduqda $(P, A,)$ cütünə $A$ çoxluğunun elementləri arasındakı münasibətə **Binar münasibət** deyilir.

A çoxluğunun x və y elementləri ($x \in A, y \in A$) arasında binar münasibəti $x\rho y$ ilə işarə edilir.

Misallara baxaq.

Tutaq ki, A= $\{1,3,4,6\}$ çoxluğunda $\rho(\rho \mid x$:y) münasibəti verilmişdir . Binar münasibəti ödəyən cütləri yazaq:

P = $\{(1,1),(3,1),(4,1),(6,1),(3,3),(4,4),(6,3),(6,6)\}$ olar.

Verilmiş A çoxluğunun elementləri arasında binar münasibətini əyani təsəvvür etmək üçün bu çoxluğun elementlərini nöqtələrlə göstəririk, sonra isə bu nöqtələrdən $\rho$ münasibətini ödəyən (x,y) cütlərini seçirik və x-də y-ə doğru oxlar keçiririk. Alınan çertyoj $\rho$ münasibətinin qrafı, çoxluğun elementlərini göstərən nöqtələr isə qrafın təpələri adlanır.

Misal. B= $\{2,4,6,8,12\}$ $çoxluğunda$ $\rho(\rho|x > y)$ münasibətinin qrafını quraq.

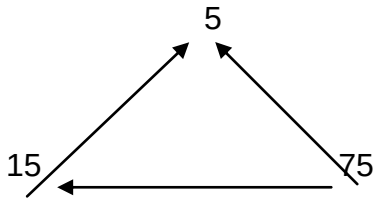
$$P = \{(4,2),(6,2),(6,4),(8,2),(8,4),(8,6),(12,2),(12,4),(12,6),(12,8)\}$$

Şərh etdiyimiz qaydaya əsasən müstəvi üzərində 5 sayda nöqtələr götürək və istiqamət böyük ədəddən kiçik ədədə doğru olmaqla $x > y$ şərtini ödəyən cütləri istiqamətli xətlərlə birləşdirək Alınan fiqur münasibətin tələb olunan qrafı olur.

Başqa misala baxaq.

B= $\{5,15,75\}$ çoxluğunda $\rho(\rho \mid x$:y) münasibəti verilmişdir . Bu münasibətin qrafını quraq. Əvvəlcə $\rho$ münasibətini ödəyən cütlər çoxluğunuyazaq:

$P = \{(5,5),(15,5),(15,15),(75,5),(75,15),(75,75)\}$




Nöqtələri oxla elə birləşdirmək lazımdır ki, onun çıxdığı nöqtəyə uyğun ədəd, onun daxil olduğu nöqtəyə uyğun ədədin böləni olsun. Başlanğıc və uc nöqtələri üst-üstə düşən

oxlar ilgək adlanır. Qrafın təpə nöqtələrində əmələ gələn ilgəklər onun göstərir ki, hər bir ədəd özü-özünün bölənidir.

Beləliklə, çoxluqların elementləri arasındakı münasibətləri aşağıdakı üsullarla vermək olar:

1) Çoxluqların elementləri arasında $\rho$ münasibətinə malik olan bütün cütləri sadalamaq üsulu. Məsələn, A=$\{3,5\}$ $v$ $B = \{4,6\}$ çoxluqlarının elementləri arasında $\rho(\rho|x < y)$ münasibətini göstərək.

$$P = \{(3,4), (3.6), (5.6)\}$$

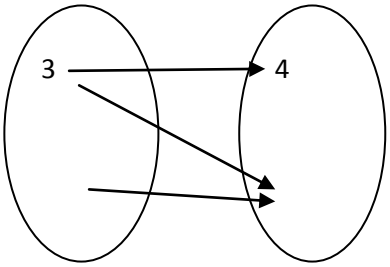
2) Cədvəl vasitəsilə ifadə etmək üsulu.

| A \ B | 4 | 6 |
|---|---|---|
| 3 | | |
| 5 | | |

Xətlənmiş damalar $\rho(\rho|x < y)$ münasibətini ifadə edir.

3) Qraf vasitəsilə göstərmək üsulu.

$\rho(\rho|x < y)$



## Mövzu 7. Natural ədəd anlayışının yaranması. MOTƏ çoxluğunun aksiomatik qurulması. Peano aksiomları.

Plan

1. Natural ədəd anlayışının yaranması.
2. Aksiomatik sistem nədir?
3. Peano aksiomları.

Ədəd haqqında təlim müasir riyaziyyatın ən mühüm bölmələrindən biridir. Ədədlər arasındakı münasibətləri və hesab əmelləri xassələrini öyrənmək üçün təkcə konkret ədədlərdən deyil, hərdən simvolikalardan da istifadə olunur.

Riyaziyyatda kəmiyyətlər və onların ölçülməsi mühüm yer tutur. İnsanlar həyatda, əmək fəaliyyətində həmişə sayına, hesablama və ölçmə ilə məşğul olmuşlar. Saymanın, ölçmənin və hesablamanın nəticəsi ədədlə ifadə olunur. Əlbəttə, insanlar ədəd anlayışına gəlib çatana qədər çox uzun yol keçmişlər. Sayma vasitəsi olaraq iki əl, iki ayaq, əl barmaqları, ayaq barmaqları, dörd barmaqda olan oynaqların sayı və s. istifadə etmişlər. Sayma prosesi mürəkkəbləşdikcə əl və ayaq barmaqları insanların tələbatı ödənmirdi. Ona görə vəziyyətdən çıxmaq üçün əldə düzəldilən və ya təbii sayma vasitələrindən istifadə edirdilər.

İnsanlar fəaliyyətlərində müxtəlif çoxluqlardan istifadə etmişlər. Burada çoxluqların keyfiyyəti yox, miqdarı münasibətlər (xassələri) əsas götürülmüşdür. Elementlərinin sayı eyni olan çoxluqlar bir sinfə daxil edilmişdir. Çoxluqların miqdarı xarakteriatiksı haqqında təsəvvürlərin yaranmasında çoxluqlar ilə əl barmaqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılmışdır. Tədricən natural ədəd anlayışı meydana gəlmişdir.

Natural ədəd anlayışı riyaziyyatın əsas anlayışlarından biridir. Sayarkən istifadə etdiyimiz ədədlərə natural ədədlər deyilir. Hər bir natural ədəd müəyyən çoxluğun elementlərinin miqdarını xarakterizə edir. Eyni miqdarda elementləri olan istənilən çoxluqlar eyni natural ədədlə xarakterizə olunur. Bir elementdən ibarət olan bütün çoxluqlara “vahid” (bir) adlanan natural ədədi uyğun qoymaq olar. İki elementdən ibarət olan bütün çoxluqlara “iki” ədədi adlanan başqa bir natural ədədi uyğun qoymaq olar. Belə uyğunluğun düzəldilməsini davam etdirərək aşağıdakı xassələrə malik olan bütün natural ədədləri almaq olar: a) natural ədədlər sonsuzdur; b) bütün natural ədədlər vahiddən başlayaraq biri digərinin ardınca düzülür. Natural ədədlər çoxluğu natural ədədlər sırasını əmələ gətirir: birinci ədəd-vahidi (bir), ikinci ədəd-iki, üçüncü ədəd-üç və s.; aşağıdakı kimi yazılır: $N = \{1,2,3,4,5,6,....\}$ Hər bir natural ədədin bu sırada öz yeri vardır. Onlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rəqəmlərinin köməyi ilə yazılır. Natrural ədədlər sırası verildikdə iki natural ədəddən hansının böyük olduğunu müəyyən etmək olar: natural ədədlər sırasında başlanğıcdan (sıfırdan) uzaqda duran ədəd böyük, başlanğıca (sıfıra) yaxın olan ədəd kiçikdir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,... sırasında 7 və 8-i müqayisə etsək 7 vahidə yaxın, 8 isə ondan 7-yə nəzərən uzaqdadır. Ona görə $7<8$ alırıq.

**Tərif**. Eyni bir sinfə daxil olan çoxluqların hər birini xarakterizə edən invariata (cəhətə) natural ədəd deyilir.

Bu tərif natural ədədlə sonlu çoxluğun elementləri sayı arasındakı münasibəti ifadə edir.Tərifdən aydın olur ki, hər bir eyni bir güclü çoxluqlar sinfinə bir natural ədəd və tərsinə hər bir natural ədədə qarşı bir eynigüclü çoxluqlar sinfi uyğun gəlir.

1,2,3,...,n,... ədədlər sırasına natural ədədlər deyilir. Onluq say sistemində on işarədən istifadə edilir ki, bunlarada rəqəmlər deyilir. Bütün natural ədədlər çoxluğu bu işarələr vasitəsilə yazılır.
Sıfır natural ədəd hesab olunmur. Sıfır boş çoxluqda elementlərin miqdarını xarakterizə edən ədəd kimi daxil edilir. Sıfır bütün natural ədədlərdən əvvəl gələn ədəd hesab edilir və 0 (sıfır) ilə işarə olunur. 0 (sıfır) ədədinin natural ədədlər çoxluğu ilə birləşməsi genişlənmiş natural sıra əmələ gətirir.

**2**. Hər hansı bir A təklifinin doğruluğunu hesablayarkən, bundan əvvəl isbat edilmiş əvvəlki təkliflərə əsaslanılır. Bu qayda ilə ilk əvvəl isbat edilmiş təklifi müəyyənləşdirmək isə qeyri mümkündür. Bu proses heç vaxt sona yetməz. Analoji olaraq hər hansı təklifə tərif vermək üçün bundan əvvəl tərif verilmiş anlayışa əsaslanmaq lazımdır. Əgər prosesi bu qayda ilə davam etdirsək ilk əvvəl tərif verilmiş anlayışı tapa bilmərik. Ona görə ilk dəfə tərif verə bilmədiyimiz anlayışları riyaziyyatda ilk anlayış adı verib bundan sonra gələn riyazi anlayışlara ilk anlayışlar vasitəsilə tərif veririk. Məsələn, ədəd, müstəvi, nöqtə, kəmiyyət və s.

İsbatsız qəbul edilmiş bütün anlayışlar və təkliflər birlikdə aksiomlar sistemi adlanır.

MOTƏ hesabıda aksiomlar sisteminə əsasən qurulur. Belə ki, ilkin olaraq riyaziyyatda söz seçilir (ad qoyulur) bu sözlərə uyğun işarələr verilir ki, bu işarələr rəqəm adlanır. Rəqəmlər isə 10- dur (1,2,...,0). Rəqəmlər əsasında ədədlər yazılır: 0,1,2,3,...,n,... Bu ədədlərə də tərif verilmir. Lakin MOTƏ hesabında ədədlər üzərində əməllər aparılan zaman onlara tərif verilə bilər.

Beləliklə də hər hansı riyazi nəzəriyyənin ciddi məntiqi şəkildə qurulmasına aşağıdakı kimi yanaşılmalıdır.

1. Bu nəzəriyyənin tərifsiz qəbul edilən anlayışlarını, yəni əsas anlayışlar obyektini ayırmışlar.

2. Həmin obyektlərin isbatsız qəbul edilən xassələrini ayırmışlar (aksiomlar).

3. Qalan bütün obyektlərin tərifləri əsas anlayışlar üzərində qurulmalı, xassələri isə aksiomlara əsasən ciddi məntiqi şəkildə isbat olunmalıdır.

Hər hansı riyazi nəzəriyyənin bu metodla qurulmasına riyaziyyatda **aksiomatik** metod deyilir. Nəzəri hesabın aksiomatikasında əsas anlayışlar aşağıdakılar götürülmüşdür.

1. Əsas obyektlər- natural ədəd, vahid.
2. Natural ədədlər arasındakı münasibət- bilavasitə əvvəl gəlir,
bilavasitə sonra gəlir.

**3**. İstər natural, istərsə də MOTƏ üzərində hesab əməllərini, onların xassələrini və bu xassələrdən çıxan nəticələri nəzəri cəhətdən əsaslandırmaq üçün hesab aksiomaları tərtib etmək zərurəti qarşıya çıxır.

Natural ədədlər hesabının aksiomaları italyan riyaziyyatçısı D.Peano (1858-1932) tərəfindən verilmişdir.

**Tərif**. Natural ədədlər böş olmayan elə N çoxluğunun elementlərinə deyilir ki, onun ixtiyari a və b elementləri üçün “b elementi a-dan bilavasitə sonra gəlir” münasibəti təyin edilib və aşağıdakı aksiomlar ödənilir:

1.Vahid bilavasitə heç bir natural ədəddən sonra gəlməyən natural ədəddir.

2. *a* natural ədədi neçə olursa olsun, bilavasitə ondan sonra gələn yeganə $a^{/}$ ədədi vardır.

3. Vahiddən fərqli *a* natural ədədi neçə olursa olsun həmişə elə bir yeganə $c^{/}$ ədədi vardır ki, *a* bilavasitə ondan sonra gəlir.

4. Əgər hər hansı natural ədədlər çoxluğu M aşağıdakı iki xassəyə malikdirsə;

1) vahid ona daxildir;

2) hər hansı *a* ədədi ona daxil olmaqla bilavasitə ondan sonra gələn $a^{/}$ ədədidə ona daxildirsə, onda M çoxluğu bütün natural ədədlər çoxluğudur- N-dir.

$$N = \{1,2,3,...,n,...\}$$

Bu dörd aksiom olub “Peano aksiomları” adlanır.

Bilirik ki, hər bir boş çoxluğu xarakterizə edən ədədə “sıfır” ədədi deyilir.

Sıfır bütün natural ədədlərdən əvvəl gəldiyinə görə, hər bir natural ədəddən kiçikdir. Ona görə Peano aksiomları MOTƏ çoxluğunun da əsasını təşkir edir. Fərq odur ki, bu sırada birinci ədəd sıfırdır. Qalan bütün əlamətlər MOTƏ çoxluğunda saxlanılır. MOTƏ çoxluğunda Peano aksiomları aşağıdakı kimidir.

1. Sıfır bilavasitə heç bir MOTƏ-dən sonra gəlməyən MOTƏ- dir.

2. Mənfi olmayan *a* tam ədədi üçün həmişə bilavasitə ondan sonra gələn yeganə $a^{/}$ mənfi olmayan tam ədədi vardır.

3. Sıfırdan fərqli mənfi olmayan $a^{/} \neq 0$ tam ədədi üçün həmişə ondan bilavasitə əvvəl gələn yeganə *a* mənfi olmayan tam ədədi vardır.

4. Əgər hər hansı mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu iki xassəyə malikdirsə;

1) sıfırı öz daxilinə alır;

2) hər hansı mənfi olmayan *a* tam ədədini daxilinə almasından, *a*-dan bilavasitə sonra gələn $a^{/}$ tam ədədini də öz daxilinə alması çıxırsa, onda bu çoxluq MOTƏ çoxluğudur.

## Mövzu 8. Mənfi olmayan tam ədədlər üzərində hesab əməlləri və onların xassələri.

Plan

1. Mənfi olmayan tam ədəd anlayışı.
2. MOTƏ çoxluğunda toplama əməli və onun xassələri.
3. MOTƏ çoxluğunda çıxma əməli və onun xassələri.
4. MOTƏ çoxluğunda vurma əməli və onun xassələri.
5. MOTƏ çoxluğunda bölmə əməli və onun xassələri.

**1**. **Tərif.** *Natural ədədlər çoxluğunun sıfırla birləşməsindən alınan çoxluğa mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu deyilir və $N_0$ = {0,1,2,3,4...n} kimi işarə edilir.* Mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. Nizami çoxluqdur.
2. Sonsuz çoxluqdur.
3. Diskret çoxluqdur.

MOTƏ çoxluğunda ixtiyari $a$ elementindən (sıfırdan başqa) əvvəl və sonra gələn MOTƏ var. Başqa sözlə $N_0$ çoxluğunda ixtiyari $a \neq 0$ ədədini qeyd etsək, həmin ədəddən sonra və əvvəl gələn ədədləri tapa bilərik. Ona görə də $N_0$ nizami çoxluqdur.

MOTƏ çoxluğunun başlanğıc elementi sıfır, sonuncu elementi isə yoxdur, yəni $N_0$ çoxluğu sonsuzdur.

Çoxluğun istənilən iki elementi arasında həmin çoxluqdan üçüncü element olmadıqda, ona **diskret çoxluq** deyilir.

**2.** İstər çoxluqlar nəzəriyyəsi vasitəsilə, istərsə də mənfi olmayan tam ədədlərin aksiomatik nəzəriyyəsi vasitəsilə toplama əməlinin tərifi anlayışlarla izah olunur və ona konkret tərif verilmir.

Fərz edək ki, ortaq elementləri olmayan, 3 elementli A çoxluğu və 4 elementli B çoxluğu verilmişdir. Yəni,

$$A \cap B = \emptyset, \ \ n(A) = 3 \ \ v \ \ n(B) = 4$$

A və B çoxluğunun birləşməsindən alınan çoxluğun elementlərinin sayı $n(A \cup B) = 7 - dir$. Başqa sözlə birləşmədəki elementlərin sayı 3+4=7 cəminə bərabərdir. Ortaq elementi olmayan sonlu çoxluqların birləşməsindən alınan çoxluq yalnız verilmiş çoxluqların bütün elementlərindən düzəlmiş çoxluğa deyilir.

Birləşdirilən ortaq elementi olmayan sonlu çoxluqların elementləri sayını bildirən mənfi olmayan tam ədədə **toplananlar**, birləşmə nəticəsində alınan çoxluğun elementləri sayını göstərən mənfi olmayan tam ədədə isə **cəm** deyilir. Ümumi şəkildə a+b = c olduqda, $a$ və $b$ ədədləri toplananlar, $c$-yə cəm deyilir. Beləliklə, toplama əməlinin nəticəsi **cəm** adlanır.

Plyus (+) işarəsi riyaziyyata XV əsrdə daxil edilmişdir, latın sözü olub "artırmaq" mənasındadır. Bəzi ədəbiyyatlarda toplama əməlinə aşağıdakı kimi tərif verilir:

İki ədədin cəminin tapılmasına imkan verən əmələ **toplama əməli** deyilir.

Mənfi olmayan tam ədədlərin cəminin tapılmasına nəzəri-çoxluq anlayışı əsasında yanaşma üsulu toplama əməlinin mühüm xassələrinin doğruluğunu əsaslandırmağa imkan verir.

Toplama əməlinin aşağıdakı iki xassəsi vardır:

1.**Yerdəyişmə (kommutativlik)** xassəsi. Toplananların yerini dəyişdikdə cəm dəyişmir. İxtiyari $a$ və $b$ mənfi olmayan tam ədədləri üçün $a+b=b+a$ bərabərliyi doğrudur.

Tutaq ki, $a$ ədədi A çoxluğunun, $b$ ədədi B çoxluğunun elementlərinin sayıdır və $A \cap B = \emptyset$. Onda $a+b = n(A \cup B)$. Çoxluqların birləşməsi kommutativlik xassəsinə tabe olduğundan n$(A \cup B) = n(B \cup A)$ və deməli, $a+b=b+a$ olar.

2. **Qruplaşdırma ( assosiativlik)** xassəsi. Toplananların hər hansı bir qrupunu onların cəmi ilə əvəz etdikdə cəm dəyişmir. İxtiyari $a, b, c$ mənfi olmayan tam ədədləri üçün $(a+b)+c=a+(b+c)$ bərabərliyi doğrudur.

Tutaq ki, $a=n(A), b=n(B), c=n(C) v A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset$. Onda iki ədədin cəminə görə

$(a+b)+c = n(A \cup B)+n(C) = n((A \cup B) \cup C)$ kimi yazmaq olar. Çoxluqların birləşməsi assosiativlik xassəsinə tabe olduğundan

$n\big((A \cup B) \cup C\big) = n(A \cup (B \cup C))$ deməli, $(a+b)+c=a+(b+c)$ olar.

**3. Tərif.** *Cəm və məlum toplanana görə digər toplananın tapılması əməlinə çıxma əməli deyilir.*

$a$ ədədindən $b$ ədədini çıxmaq elə bir $c$ ədədi tapmaq deməkdir ki, c ədədini b ədədinə əlavə etdikdə $a$ ədədini almaq mümkün olsun . Deməli, a-b dedikdə, elə c ədədi başa düşülür ki, $a=b+c$ olur və belə yazılır $a-b=c$. Burada $a$-azalan, b-çıxılan, c fərq adlanır. Fərq çıxma əməlinin nəticəsidir. Çıxma əməlinin doğruluğu toplama əməli vasitəsilə yoxlanılır. "-" minus və "+" plyus işarələri XV yüzillikdə Leanardo da Vinçinin (İtaliya) və Vidneanın (Almaniya) əsərlərində göstərilmişdir.

Toplama və çıxma əks əməllərdir. Belə ki, toplamada toplananlar vasitəsilə cəm tapılır, çıxmada isə cəm və toplananlardan biri verildikdə o biri toplanan tapılır. Bunu coxluqlar üzərində isbat edək:

Tutaq ki, $A=\{x,y,z,t,p,r,s\} v B=\{x,y,z,t\}$ çoxluqları verilmişdir. B A çoxluğunun alt çoxluğudur. A çoxluğunun elementləri miqdarı 7, B çoxluğunun elementləri miqdarı isə 4 olsun. Yəni, $n(A)=7, n(B)=4$ və B⊂A olduqda $n(A \backslash B) = n(A) - n(B) = 7-4=3$ fərqini alırıq.

Fərq anlayışını daxil edərkən $B \subset A$ şərti əhəmiyyətli rol oynayır. Doğrudan da, $B \subset A$ münasibətindən $n(B) \leq n(A)$ münasibəti çıxır. Bu da o deməkdir ki, $a = n(A), b=n(B)$ $v B \subset A$ olduqda $a-b$ fərqi onda və yalnız onda olur ki, $b \leq a$ olsun.

Çıxma əməlinin aşağıdakı xassələri vardır:

***1 xassə.*** Ədəddən iki ədədin cəmini çıxmaq üçün əvvəl bu ədəddən birinci toplananı çıxmaq, sonra isə alınmış fərqdən ikinci toplananı çıxmaq və s. lazımdır: İstənilən m ,n və p mənfi olmayan tam ədədləri üçün $m-(n+p)=(m-n)-p$ bərabərliyi doğrudur.

***2 xassə.*** İki ədədin cəmindən ədədi çıxmaq üçün bu ədədi toplananların birindən çıxıb, fərqi o biri toplanana əlavə etmək lazımdır: İstənilən m və n mənfi olmayan tam ədədləri üçün $(m+n)-p=(m-p)+n=(n-p)+m$ bərabərliyi doğrudur.

**4.** Mənfi olmayan tam ədədlərin hasili anlayışını təyin etməyin müxtəlif üsulları var. Əsasında cəm anlayışı duran yanaşma üsuluna baxaq. Bu üsulda hasil anlayışı ilə cəm anlayışı arasındakı məntiqi əlaqə daha aşkar olduğundan, hasil anlayışının cəm anlayışı vasitəsilə təyin edilməsi məntiqi alınma qaydasına əsaslanır.

**Tərif.** *Sonlu sayda bərabər toplananların cəminin tapılması əməlinə vurma əməli deyilir.* Məsələn,

$$\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{b\ sayda} = a \cdot$$

Hər biri $a$-ya bərabər olan b sayda bərabər toplananlar cəminə $a$ və $b$ ədədlərinin hasili deyilir və $a \cdot b = c$ kimi işarə edilir. Burada a və b vuruqlar, c hasil adlanır. Vurma əməlinin nəticəsi hasildir. Vurma əməli toplama əməlinin xüsusi halıdır. Nəzəri-çoxluq anlayışına istinad etməklə mənfi olmayan tam ədədlərin vurulması əməlinin sonlu çoxluqların Dekart hasili ilə bağlı olması aşkardır.

Tutaq ki. A və B verilmiş sonlu çoxluqlardır: A= $\{a, b, c\}$ , $B = \{d, e, f, k\}$. Bu çoxluqların Dekart hasilini tapaq.

$$A \times B = \{(a, d), (a, e), (a, f), (a, k), (b, d), (b, e), (b, f), (b, k), (c, d), \}$$

$(c, e), (c, f), (c, k)$

Digər tərəfdən $n(A) = 3, n(B) = 4$ olduğundan $n(A \times B) = 3 \cdot 4 = 12$ olar deməli, A və B çoxluqlarının Dekart hasilindəki elementlərin sayı $n(A) \cdot n(B)$ hasilinə bərabər olar. Beləliklə,$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Vurma əməlinin aşağıdakı xassələri vardır.

1.**Yerdəyişmə (kommutativlik)** xassəsi. Vuruqların yerini dəyişdikdə hasil dəyişmir: İstənilən m və n mənfi olmayan tam ədədləri üçün m·n = n·m bərabərliyi doğrudur.

2. **Qruplaşdırma ( assosiativlik)** xassəsi. Yan-yana duran bir neçə vuruğu onların həsili ilə əvəz etdikdə hasil dəyişmir:

İstənilən $m$ ,$n$ və $p$ mənfi olmayan tam ədədləri üçün

$m \cdot n \cdot p = (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ bərabərliyi doğrudur.

3. **Paylama (distributivlik)** xassəsi.

a) Cəmin ədədə hasili, toplananların hər birinin həmin ədədə hasilləri cəminə bərabərdir. $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$

b) Fərqin ədədə hasili, azalan və çıxılanın həmin ədədə hasilləri fərqinə bərabərdir. $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$

**5. Tərif.** *İki vuruğun hasili və vuruqlardan biri verildikdə ikinci vuruğu tapmaq əməlinə bölmə deyilir.*

$a : b = c$ yazılışında, a- bölünən, b-bölən, c isə qismət adlanır. a ədədini b ədədinə bölmək elə bir c ədədini almaq deməkdir ki, c ədədini b ədədinə vurduqda a ədədi alınsın.

Bölmə əməlinin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

***I xassə.*** Cəmi hər hansı bir ədədə bölmək üçün, hər bir toplananı bu ədədə bölüb alınan qismətləri toplamaq lazımdır: İstənilən m və n mənfi olmayan tam ədədləri üçün $(m + n): p = (m: p) + (n: p)$ bərabərliyi doğrudur.

***II xassə.*** Fərqi hər hansı bir ədədə bölmək üçün azalan və çıxılanı həmin ədədə həmin ədədə ayrı-ayrılıqda bölüb, birinci qismətdən ikinci qisməti çıxmaq lazımdır:

İstənilən m və n mənfi olmayan tam ədədləri üçün $(m - n): p = (m: p) - (n: p)$ bərabərliyi doğrudur.

Toplama, vurma, bölmə əmellərinin aşağıdakı xüsusi halları vardır:

1. $a + 0 = 0 + a = a$
2. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
3. $a \cdot 1 = a$
4. $a : 1 = a$
5. $a : a = 1$
6. $0 : a = 0$

## Mövzu 9. Məsələ və onun tərkib hissələri. Məsələlərin müxtəlif üsullarla həlli.

Plan

1. Riyazi məsələ və onun tərkib hissələri.
2. Riyazi məsələlərin növləri.
3. Məsələ həllində tətbiq olunan metodlar.

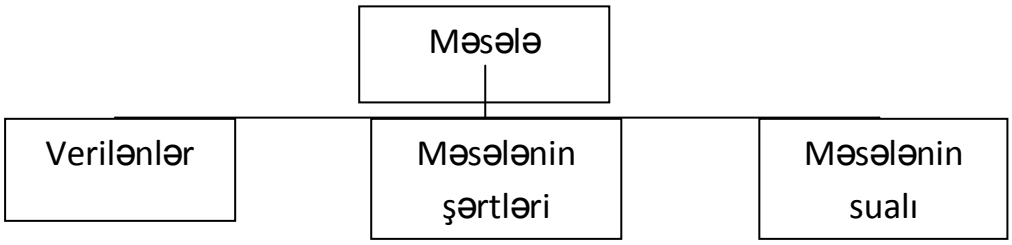
**1.** Məsələ elə anlayışdır ki,ona konkret tərif verilmir. Geniş mənada hər hansı bir işi yerinə yetirmək, həll etmək mənasında işlənilir.

Məsələ dedikdə - kəmiyyətlər arasındakı asılılıqlara və kəmiyyətlərin verilmiş qiymətlərinə əsasən, məchulun qiymətini tapmaq tələbi başa düşülür. Belə məsələlər əsasən cümlələrlə ifadə olunmuş mətn şəklində olur və onlara mətn məsələlər deyilir. Təlimdə riyazi məsələlər öyrədici, inkişaf etdirici və tərbiyələndirici rola malikdirlər. Riyazi anlayışların və simvolların mənimsənilməsində, bacarıq və vərdişlərin formalaşmasında, yeni faktların, isbatların öyrənilməsində, idrak prosesinin o cümlədən təfəkkürün inkişafında, riyaziyyata maraq, mövcud ictimai quruluşa xas olan keyfiyyətlər yaratmaqda məsələlər mühüm yer tutur.

Riyazi məsələ strukturuna görə üç hissədən ibarət olur:

1. Məsələdə kəmiyyətlərin verilmiş ədədi qiymətləri (bunlara verilənlər deyilir).
2. Məsələdəki şərt və ya şərtlər.
3. Məsələnin tələbi və ya sualı.

Riyazi məsələ struktur tərkibinə görə aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:




Məsələnin şərti – verilənlərlə axtarılanlar arasında riyazi münasibətləri ifadə edir. Məsələnin şərtlərinin sayı məchulların sayına müvafiq olmalıdır. Əks halda, məsələ ya artıq şərtə malik olur, ya da məchulları tapmaq üçün şərt çatışmır. Məsələnin şərti – axtarılanı tapmağa kifayət etməlidir. Məsələdəki verilənlər və məchullar şərt vasitəsilə əlaqədar olur.

Məsələ həlli təlimində başlanğıc mərhələ - məsələ məzmununun mənimsənilməsi və onun qısa yazılışından ibarətdir. Məsələ məzmununun qısa yazılışı hansı didaktik əhəmiyyətə malikdir?

Məsələnin qısa yazılışı:

1) görmə yaddaşı üçün obyekt rolunu oynayır;
2) məsələnin sözlərlə, cümlələrlə ifadə olunmuş məzmununu sxem (cədvəl) və ya şərti işarələrlə qısa şəkildə ifadə edir;
3) konstruktiv təsvirin elementləri ilə tanış edir;
4) kəmiyyətlər arasındakı asılılıqları riyazi simvollarla ifadə edir;

5) tapılmış cavabın yoxlanılmasını asanlaşdırır.

**2**. Məsələlərin hesab, cəbr, həndəsə məsələləri kimi təsnif edilməsi şərtidir, əslində bunların hamısı mahiyyətcə eynidir. Ona görə də bunları sadəcə olaraq "riyazi məsələ" adlandırmaq daha əlverişlidir. Çünki eyni məsələni hesab üsulu ilə, cəbri üsulla, və ya həndəsi üsulla həll etmək mümkündür. Məsələlərin riyazi fənlərə görə təsnif edilməsi həmin məsələlərin spesifikasından irəli gəlir.

Məsələ dörd hesab əməli vasitəsilə və rasional ədədlərlə həll olunarsa, buna **hesab məsələləri** deyilir.Məsələnin həlli tənliklərin, bərabərsizliklərin həllinə gətirilərsə, buna **cəbri məsələ** deyilir. Həndəsə məsələlərinin həllində hesab, cəbr metodlar tətbiq oluna bilər.

Hesab məsələləri onların həllində tətbiq olunan əməllərin sayına görə 2 növə ayrılır:

1) bir əmənin tətbiqi ilə həll olunan məsələlərə **sadə məsələlər** deyilir.

Burada eyni bir əmənin 2 – 3 dəfə və s. tətbiq edildiyi nəzərdə tutulmur. Belə bir məsələni nəzərdən keçirək:

"Bidondan 3 l süd götürdükdən sonra 10 l süd qaldı. Əvvəl bidonda neçə litr süd vardı?"

Göründüyü kimi bu məsələ bir əməllə həll olunur.

2) iki və daha çox əməllə həll olunan məsələlərə **mürəkkəb məsələlər** deyilir.

Məsələn, "Bir şagirdin 12 karandaşı, o birinin isə ondan 8 dənə çox karandaşı var. İki şagirdin birlikdə neçə karandaşı var?" – məsələni həll etmək üçün toplama əməli 2 dəfə tətbiq olunur və bu mürəkkəb məsələdir. Bu məsələdə "12 karandaş, 8 dənə çox karandaş" məsələnin şərti, "2 şagirdin birlikdə neçə karandaşı var?" isə məsələnin sualıdır.

Hesablama üsulu ilə həll edilən mətn məsələlər müxtəlif qruplara bölünür. Bu baxımdan sadə məsələlərin həllinin aşağıdakı kimi qruplaşdırılması vacibdir:

1) İki ədədin cəminin tapılmasına aid mətn məsələlərin həlli

Sevdanın 5 qırmızı və 3 yaşıl lenti var. Sevdanın neçə lenti var?

5 + 3 = 8 (lent)

2) Qalığın tapılmasına aid mətn məsələlərin həlli.

Ata bazardan 10 kq kartof aldı. Kartofun 3 kq – ı işlədildi. Nə qədər kartof qaldı?

10 – 3 = 7 (kq)

3) Bərabər toplananların tapılması.

Vüsalə eyni cür 5 dəftər aldı. Hər dəftər 20 qəpik olarsa, Vüsalə nə qədər pul xərclədi? (20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100 qəpik = 1 manat)

20 x 5 = 100 (manat)

4) Bərabər hissələrə bölmə

40 dəftəri 8 şagirdə bərabər payladılar. Hər şagirdə neçə dəftər çatdı?

40 : 8 = 5 (dəftər)

Məktəb riyaziyyat kursunda məsələlər didaktik məqsədlərinə görə üç növə ayrılır:

1. İdraki məsələlər- bunların həlli prosesində şagirdlər yeni biliklər qazanırlar.
2. Məşqetdirici məsələlər- bunların həlli nəticəsində şagirdlər bacarıq və vərdişlər qazınırlar.
3. İnkişafetdirici məsələlər – bunların həlli nəticəsində ümumi dünyagörüşü və yaradıcı təfəkkürü inkişaf edir.

**3.** Hər bir mürəkkəb məsələnin həlli – sadə məsələlərin həllinə gətirilir. Deməli, verilmiş mürəkkəb məsələnin tələbinə cavab vermək üçün onu elə sadə məsələlərə ayırmaq lazımdır ki, sonuncu sadə məsələnin həlli – verilmiş məsələnin baş sualına cavabı olsun. Sadə məsələlərin həlli ardıcıllığı - verilmiş məsələnin **həlli alqoritmini** təşkil edir.

Məsələ həllində **iki metoddan** istifadə olunur:

1) Məsələnin sintetik metodla həlli.
2) Məsələnin analitik metodla həlli.

*Məsələnin sintetik metodla həlli.*

Mürəkkəb məsələni hesab metodu ilə həll etmək üçün həmin məsələni sadə məsələlərə ayırmaq lazımdır. Alınmış sadə məsələlərdən ən azı biri tam sadə məsələ olur, yəni onu həll etmək mümkündür. Mürəkkəb məsələnin həllinə məhz həmin tam sadə məsələdən başlamaq lazımdır. Bu məsələnin həlli nəticəsində tapılan yeni ədəd növbəti natamam sadə məsələni tam məsələyə çevirir və bu qayda ilə qalan sadə məsələlər həll edilir. Mürəkkəb məsələni həll etmək üçün "məlumdan məchula" doğru prinsipi tətbiq edilir. Yəni məsələnin təhlili verilənlərdən suala doğru aparılarsa , buna məsələnin **sintetik metodla həlli** deyilir. Sintetik metod təkcə hesab məsələlərinin həllində deyil, həm də hesablamaya aid həndəsə məsələlərinin həllində də tətbiq olunur. Bu metodun çatışmayan cəhəti ondan ibarətdir ki, məsələ həllinə nədən, hansı sadə məsələdən, hansı asılılıqdan başlamaq haqqında konkret meyyar yoxdur. Bu metod şagirlərin müstəqil mühakimə aparma qabiliyyətlərini az inkişaf etdirir.

Bir məsələni nəzərdən keçirək: "Briqada üç gün ərzində 387 kq pambıq topladı. Briqada I gün bütün pambığın 1/3- ni, II gün isə ondan 12 kq çox pambıq topladı. Briqada III gün nə qədər pambıq topladı?"

Bu məsələni sintetik metodla təhlil edək:

1. Briqada üç gündə neçə kq pambıq topladı?
2. Briqadanın I gün nə qədər pambıq topladığını bilmək olarmı? (387:3)
3. II gün nə qədər pambıq topladığını bilmək olarmı? (I gündə yığılan pambığın miqdarına 672 kq pambığı əlavə etmək lazımdır).
4. Məsələnin sualına cavab vermək üçün nə etmək lazımdır? (I və II günlərdə toplanan pambığın miqdarını ümumi miqdardan çıxmaq lazımdır).

Məsələnin həlli:

1) Briqada I gün nə qədər pambıq topladı?
387 : 3 = 129 (kq)

2) Briqada II gün nə qədər pambıq topladı?

129 + 12 = 141 (kq)

3) Briqada I və II gün birlikdə nə qədər pambıq topladı?

129 +141 = 270 (kq)

4) Briqada III gün nə qədər pambıq topladı?

387 – 270 = 117 (kq)

*Məsələnin analitik metodla həlli.*

Analitik metodla məsələ həllində "məchuldan məluma" istiqamətdə hərəkət edilir. Yəni məsələ həlli alqoritmini müəyyən etmək üçün verilən ilk sual belə olur: "Məsələdə nəyi tapmaq tələb olunur?" Bu sualın cavabı həm də verilənlərlə məchullar arasındakı asılılığı aşkar edir.

Bir məsələni nəzərdən keçirək: "Bir sağıcı bir gündə 195 l süd sağdı. Bu ikinci sağıcının sağdığı süddən 15 l az idi. İkinci sağıcı sağdığı südü eyni böyüklükdə 7 bidona doldurdu. Hər bidonda neçə litr süd oldu?

Məsələni analitik metodla təhlil edək:

1. Məsədə nə soruşulur? (hər bidonda neçə litr süd oldu).
2. Bu suala cavab vermək üçün nəyi bilmək lazımdır? (İkinci sağıcının sağdığı südün miqdarını tapmalıyıq).
3. Bunun üçün nə etməliyik? ( 195+15 cəmini 7-yə bölmək lazımdır.)

Məsələnin həlli:

1) 195+15= 210 ( *l* ) – ikinci sağıcının sağdığı südün miqdarı
2) 210 : 7 = 30 ( *l* ) - hər bidonda olan südün miqdarı.

Məsələnin sintetik və analitik metodlarlan təhlili – həmin məsələnin həlli alqoritmini müəyyən etməyə imkan verir. Hər iki metodun tətbiqində oxşar olan cəhət

ondan ibarətdir ki, mürəkkəb məsələ sadə məsələlərə ayrılır və alınmış sadə məsələlər ardıcıllığında tam sadə məsələni həll etdikdən sonra qalan bütün sadə məsələlərin hər biri tam məsələyə çevrildikcəhəll olunur və nəhayət əsas məsələnin tələbinə cavab verir.

Məsələnin riyazi modelini qurmaqla, onun həlli alqoritmini də müəyyənləşdiririk. Fərz edək ki, məsələnin məzmununa uyğun tənlik qurulmuşdur. Tənliyin həll edilməsi - yenə məlumlara əsaslanır və sonuncu əməli tətbiq etməklə tələb olunanı tapırıq.

Onu da qeyd etmək lazımdır ki, analitik metod – məsələ həlli alqoritmini müəyyən etmək üçün daha səmərəlidir və o, şagirdin produktiv, məntiqi və funksional təfəkkürünün inkişafında mühüm rol oynayır.

*Cəbri təhlil və ya tənliklər metodu.* Əslində tənliklər metodu analitik metodun ən mühüm xüsusiyyətlərini özündə əks etdirir. Çünki məsələ həllində tənlik qurmanın tətbiq edilməsi elə özü "məchuldan məluma" doğru prinsipinə əsaslanır. Bir qayda olaqraq, əsas məsələnin tələbini, məchul ilə işarə edib və qurulmuş tənliyi həmin məchula nəzərən həll edilir. Bəzi hallarda həllin səmərəli olması üçün əsas məsələ iki köməkçi məsələyə ayrılır. Birinci köməkçi məsələ adi hesab üsulu ilə həll edilir, ikinci köməkçi məsələ isə tənlik qurmaqla həll olunur.

Tənliklər metodu ilə məsələ həlli prosesini aşağıdakı mərhələlərə ayırmaq olar:

I mərhələ. Məsələnin tələbinə əsasən məchul daxil edilir, məsələnin modeli qurulur.

II mərhələ. Əsas məsələ - modelin qurulması nəticəsində köməkçi məsələyə çevrilir və bu məsələ üzərində ( tənlik üzərində) çevirmələr aparmaqla tənliyin kökləri tapılır.

Məhz bu mərhələdə - alınmış köklərin məsələ tələbini ödəyib – ödəməməsi yoxlanılır. Tənliklər metodu ilə məsələ həllinin sonu – cavabın yoxlanması ilə bitir. Cavabın doğruluğunu tənlikdə yox, məsələdə yoxlamaq lazımdır.

Bir məsələni nəzərdən keçirək: "Düzbucaqlının uzunluğu 45 dm, perimetri isə 130 dm –dir. Düzbucaqlının eni nə qədərdir?"

Tənliyin qurulması və həlli:

1) x - düzbucaqlının eni

2) (45+x) ⋅2 - düzbucaqlının perimetri

3) (45+x) ⋅2 = 130

45⋅2 + 2x = 130

90 +2x = 130

2x = 130 -90

2x = 40

x = 20

Cavab: Düzbucaqlının eni 20 dm –dir.

## Mövzu 10. Say sistemləri. Mövqesiz və mövqeli say sistemləri. Onluq say sistemi. Bir say sistemindən digər say sisteminə keçid.

Plan

1. Say sistemləri haqqında anlayış. Mövqesiz və mövqeli say sistemləri.
2. Onluq say sistemi. Onluq say sistemindən fərqli say sistemləri.
3. Ədədlərin bir say sistemindən digərinə çevrilməsi.

**1.** İnsanlar gündəlik əməli fəaliyyətlərində hər addımda ədədlərlə təmasda olurlar. Bu işdə bizə ədədlərin qəbul edilmiş xüsusi yazılış üsulu kömək edir. Ədədlərin bu yazılış üsulu **say sistemi** adlanır.

*Tərif.* Say sistemi ədədlərin adlandırılması,yazılması və onlar üzərində əməllərin icra edilməsi üçün istifadə olunan xüsusi dildir.

Müxtəlif say sistemləri vardır, lakin ədədlərin adlandırılması və işarə edilməsindənki rəqəmlərin tutduğu mövqedən asılı olaraq say sistemləri 2 növ olur:

1. Mövqesiz say sistemi.
2. Mövqeli say sistemi.

***Mövqesiz*** say sistemlərində hər bir ədəd simvolların (rəqəmlərin) müəyyən yığımı ilə ifadə olunur. Burada ədədi təşkil edən rəqəmlərin qiymətləri onların tutduğu yerdən (mövqedən) asılı olmur və hesab əməlləri mürəkkəb qaydalarla aparılır. Məsələn, 4000 il bundan əvvəl Qədim Misirdə ədədlərin yazılışı üçün xüsusi heroqlif işarələr qəbul edilmişdi. Bu zaman ədədin yazılışında nə qədər çox mərtəbə varsa, o qədər də işarə lazım olurdu. Bu say sistemində hər bir işarənin qiyməti onun yazılışındakı (mövqeyindən) asılı deyil.

Bu say sistemlərinə 2500 min il bundan əvvəl Qədim Romada istifadə olunan **Rum** say sistemini misal göstərmək olar. Romalılar çoxlu sayda ölkələri zəbt etdiklərindən onların ədədləri yazmaq üçün tətbiq etdikləri üsullar Şərqi Avropa ölkələrində uzun müddət tətbiq edilmişdir. Hələ 200 il bundan öncə iş vərəqlərində ədədlər rum rəqəmləri ilə yazılmalı idilər (o zaman belə düşünülürdü ki, adi ərəb rəqəmlərini saxtalaşdırmaq asandır). Hal-hazırda rum say sistemindən əsasən kitablarda məşhur tarixlərin, cildlərin, fəsillərin, başlıqların adlandırılmasında istifadə olunur.

Rum say sisteminin əsasında I (bir barmaq) – 1 ədədi üçün, V (açılmış ovuc) – 5 ədədi üçün, X (iki açılmış ovuc) – 10 ədədi üçün istifadə olunmuşdur. 100, 500, 1000 ədədlərini təsvir etmək üçün isə uyğun olaraq latın dilində onların adlarının (Centum – yüz, Demimille – 5 yüz, Mille – min) baş hərflərindən istifadə etmuşdilər:

**I** = 1, **X** = 10, **C** = 100, **M** = 1000
**V** = 5, **L** = 50, **D** = 500

Romalılar ədədi təsvir etmək üçün onu minliklərin, yüzlüklərin, onluqların, təkliklərin cəmi şəklində yazırdılar.Məsələn, 28 ədədi aşağıdakı kimi təsvir olunurdu:

XXVIII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1
(iki onluq, bir beşlik və üç təklik)

Aralıq ədədləri təsvir etmək üçün romalılar yalnız toplamadan deyil, həmçinin çıxmadan də istifadə etməyə başladılar. Belə bir qayda tətbiq olunurdu: böyük işarədən sağda yerləşən hər bir kiçik işarə onun qiymətinin üzərinə gəlinirdi, böyük işarədən solda yerləşən hər bir kiçik işarə isə həmin ədəddən çıxılırdı. Məsələn: IX – doqquzu, XI – on biri ifadə edir.

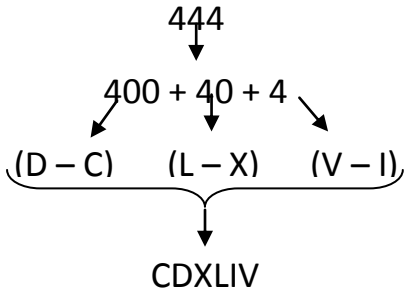
Ümumiyyətlə, ədədləri bu ardıcıllıqla yaza bilərik:

I (1), II (2), III (3), IV(4), V(5), VI (6), VII (7), VIII (8), IX (9), X (10)

XX (20), XXX (30), XL (40), L (50), LX (60), LXX (70), LXXX (80), XC (90), C (100)
CC (200), CCC (300), CD (400), D (500), DC (600),

DCC (700), DCCC (800), CM (900), M (1000)

**Misal 1.** 444ədədi rum say sistemində aşağıdakı kimi təsvir olunur:




Beləliklə, CDXLIV = (D – C) + (L – X) + (V – I) = 400 + 40 + 4.

Göründüyü kimi, onluq say sistemində verilmiş 444 ədədi üç eyni rəqəmdən (4) ibarətdir, həmin ədədin rum say sistemindəki yazlışında isə müxtəlif rəqəmlər iştirak edir.

**Misal 2.** 99 ədədi aşağıdakı kimi təsvir olunur:

99 = (– 10 + 100) + (– 1 + 10) = X C I X

**Misal 3.** 2002 ədədini isə romalılar belə təsvir edirdilər:

2002 = 1000 + 1000 + 1 + 1 = M M I I

**Misal 4.** 32 ədədini rum rəqəmləri ilə təsvir edək:

32 = 30 + 2 = (X + X + X) + (I + I) = XXXII

**Misal 5.** 1999 ədədinin 2 müxtəlif yazılışına baxaq.

1) 1999 = 1000 + 900 + 90 + 9 = 1000 + (1000 – 100) + (100 – 10) +
+(10 – 1) = M + (M – C) + (C – X) + (X – I) = MCMXCIX

2) 1999 = 2000 – 1 = 1000 + 1000 – 1 = M + (M – I) = MIM

**Misal 6.** 95 ədədinin 2 müxtəlif yazılışına baxaq.

1) 95 = 90 + 5 = (100 – 10) + 5 = (C – X) + V = XCV

2) 95 = 100 – 5 = C – V = VC

**Misal 7.** 1950 ədədinin 2 müxtəlif yazılışına baxaq.

1) 1950 = 1000 + 900 + 50 = 1000 + (1000 – 100) + 50 = M + (M – C) + L = MCML

2) 1950 = 2000 – 50 = 1000 + 1000 – 50 = M + (M – L) = MLM

**Misal 8.** MCMLXXIV – rum ədədini onluq say sisteminə çevirək:

MCMLXXIV = M + (M – C) + L + (X + X) + (V – 1) = 1000 + 900 + 50 + 20 +

Nisbətən müasir mövqesiz say sistemlərindən hesab olunan Əlifba say sistemlərinə yunan, slavyan, fin və başqa say sistemləri aiddir. Qədim Yunan əlifba say sistemində 1, 2, ... , 9 ədədləri yunan əlifbasının ilk doqquz hərfi ilə işarə olunurdu. Məsələn: α = 1, β = 2, $\gamma$ = 3 və s. 10, 20, ... , 90 ədədlərini təsvir etmək üçün isə növbəti doqquz hərfdən (ι = 10, κ = 20, λ = 30, μ = 40 və s.), 100, 200, ... , 900 ədədlərini təsvir etmək üçün isə son doqquz hərfdən (ρ = 100, σ = 200, τ = 300 və s.) istifadə edilmişdir. Məsələn: 141 ədədi bu say sistemində ρμα kimi yazılırdı.

***Mövqeli*** say sistemlərinin yaranması riyaziyyatın inkişafında böyük nailiyyət hesab edilir. Mövqesiz say sistemindən fərqli olaraq mövqeli say sistemində eyni bir işarə (rəqəm) ədədin yazılışındakı mövqeyindən asılı olaraq müxtəlif ədədləri göstərə bilir.Müxtəlif mövqeli say sistemləri olmuşdur. Məsələn, iyirmilik, onikilik, altmışlıq say sistemləri vəs.

**2.** ***Mövqeli*** say sistemləri ədədlərin təsvirindəki əyaniliyə və hesab əməllərinin aparılmasındakı sadəliyə görə böyük üstünlüklərə malikdir. Bu say sistemində ədədi təşkil edən rəqəmlərin qiymətləri onların ədəddəki mövqeləri ilə təyin olunur. Məsələn:

333 ədədindəki 3 rəqəmlərinin qiymətləri fərqlidir. Soldan birinci 3 üç yüzü, ikinci 3 otuzu, üçüncü isə üçü göstərir.

Mövqeli say sistemlərinin tipik nümunəsi bizim istifadə etdiyimiz onluq say sistemidir.

Ədədlərin yazılışı üçün istifadə olunan simvolların (rəqəmlərin) sayına say sisteminin ***əsası*** deyilir. **Onluq say sistemi**nin əsası ondur, yəni burada ədədlərin yazılışı üçün on rəqəmdən (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) istifadə olunur. Bu rəqəmlərdən müəyyən qayda ilə düzəldilmiş hər bir sonlu ardıcıllıq ədədlərin qısa yazılışı olur. Natural ədədlərin onluq say sistemində yazılışı aşağıdakı şəkildə göstərilir:

$$N = a_{n-1}.\ 10^{n-1} + \cdots a_1 \cdot 10 + a_0$$

Məsələn, onluq say sistemində $A_{10}$ = 4718 açıq şəkildə belə yazılır:

$$4718 = 4\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + 8$$

Bundan əlavə, informatikada digər mövqeli say sistemlərindən də istifadə olunur.

**İkilik say sistemi**nin əsası ikidir (q=2). Bu say sistemində istənilən ədəd 0 və 1-lərlə ifadə olunur.

**Əsas:** q = 2. **Rəqəmləri:** 0, 1.

Misal üçün, $A_2$ = 1001 ikilik ədədinin onluq say sistemindəki yazılışı belədir:

$$1001 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 = 9_{10}$$

**Səkkizlik say sistemi**nin əsası 8-dir:

q = 8;

**Rəqəmləri:** 0, 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7.

$A_8$ = 764 səkkizlik ədədinin onluq say sistemindəki yazılışı belədir:

$764 = 7\cdot 8^2 + 6\cdot 8 + 4 = 448 + 48 + 4 = 496+4=500_{10}$

***3.*** *Ədədlərin bir say sistemindən digərinə çevrilməsi.*

Aşkardır ki, eyni bir ədəd say sistemlərinin ixtiyari birində yazıla bilər. Bu yazılış formalarının birindən digər yazılış formasını almaq üçün ixtiyari p-lik sistemlərin birindən 10-luq sistemə və tərsinə 10-luqdan ixtiyari sistemə keçid qaydalarına yiyələnmək lazımdır.

**Misal.** $1202_3$ ədədini onluq say sistemində yazaq.

$1202_3 = 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3 + 2 = 27 + 18 + 2 = 47_{10}$

İstənilən say sistemlərindən də birindən digərinə keçmək mümkündür. Əvvəlcə say sistemlərinin birində yazılmış ədədi onluq say sistemində yazırıq, sonra isə ardıcıl bölmə prosesindən ibarət qaydanı yerinə yetiririk.

x ədədini əsası q olan say sistemində yazılışı aşağıdakı qayda ilə tapılır:

x ədədini q ədədinə bölürük və alınan qalığı qeyd edirik, alınan qisməti yenə də q ədədinə bölürük və qalığı qeyd edirik və prosesi belə davam etdiririk və x ədədinin q sistemindəki bütün rəqəmlərini tapırıq. Sonra isə axırıncı qalıqdan başlayaraq bütün qalıqları soldan sağa düzürük. Alınan ədəd axtardığımız ədəd olur.

**Misal 1.** $11_{10}$ ədədini 2-lik say sistemində təsvir edək:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 2 | | |
| 1 | 5 | 2 | |
| | 1 | 2 | 2 |
| | | 0 | 1 |

$11_{10} = 1011_2$ alırıq.

**Misal 2.** $173_{10}$ ədədini 8-lik say sistemində təsvir edək:

| | | |
|---|---|---|
| 173 | 8 | |
| 5 | 21 | 8 |
| | 5 | 2 |

$173_{10} = 255_8$ alırıq.

**Misal 3.** $243_5$ ədədini 4-lük say sistemində təsvir edək:

$243_5 = 2\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 3 = 50+20+3 = 73_{10}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 73 | 4 | | |
| 4 | 18 | 4 | |
| 33 | 16 | 4 | 4 |
| | 33 | | |

$$\begin{array}{l|l} 32 & 2 \\ \hline 1 & 4 \quad 1 \\ & 0 \end{array}$$

$243_5 = 1021_4$ alırıq.

## Mövzu 11. Kəmiyyətlərin ölçülməsi. Skalyar kəmiyyətlər. Uzunluq ölçü vahidləri.

Plan

1. Kəmiyyət anlayışı və onun xüsusiyyətləri.
2. Skalyar kəmiyyətlər və onların xassələri.
3. Parçanın uzunluğu və onun ölçülməsi.
4. Uzunluq ölçü vahidləri və onlar arasında əlaqə.

**1.** Kəmiyyət anlayışı riyaziyyatın əsas anlayışlarından olub, onun meydana gəlməsi və formalaşması çox qədim tarixə malikdir. Riyaziyyat elminin inkişafı ilə yanaşı kəmiyyət anlayışının da mənası bir sıra ümumiləşdirmələrə məruz qalmışdır. Hələ Evklidin "Başlanğıclar" əsərində indi skalyar kəmiyyət adlandırılan kəmiyyətlərin xassələri şərh edilmişdir. Kəmiyyət anlayışı da digər riyazi anlayışlar kimi insanların praktik ehtiyaclarının tələbləri nəticəsində yaranmışdır. Belə ki, hələ çox qədimdən insanlarda müxtəlif fiziki, həndəsi və bu kimi real obyektlərin xassələrini öyrənməyə, onları müqayisə etməyə ciddi ehtiyac yaranmışdır. Belə ölçmə müəyyən kəmiyyətin bir xassəsinə, bu xassəni xarakterizə edən müəyyən ədədin qarşı qoyulmasının riyazi konstruksiyasının yaradılmasına gətirmişdir. Kəmiyyət anlayışının hər bir konkret növü fiziki, həndəsi və digər obyektlərin müəyyən müqayisəsi ilə bağlı olduğundan, ümumi kəmiyyət anlayışı daha konkret kəmiyyətlər olan uzunluq, sahə, həcm, kütlə və s. kəmiyyətlərin bilavasitə ümumiləşməsidir. Məhz sahələrin, uzunluqların, həcmlərin, kütlənin, temperaturun və s. ölçülməsi kəmiyyətin xarakterik xassəsinə müəyyən ədədin qarşı qoyulması üsullarının riyazi konstruksiyalarındandır.

Məktəb kursunda "kəmiyyət" anlayışı "ədəd" ilə yanaşı həmişə aparıcı anlayış olmuşdur. Lakin məktəb kursunda baxılan konkret kəmiyyətlərlə bağlı müəyyən məsələlərin öyrənilməsi bu anlayışının məzmununun məntiqi ciddiliklə açılmasına gətirmir, yəni "kəmiyyət nədir?" sualına tam cavab vermir. Qoyulmuş suala cavab vermək üçün intuitiv təsəvvürlərə əsaslanaraq kəmiyyətin aşağıdakı xarakterik xüsusiyyətlərinin şərhini vermək zəruridir.

1) Kəmiyyət, əşya və hadisələrin müəyyən xassəsidir. Fizika kursundan kütlə, temperatur, sürət, uzunluq, rütubət, cərəyan şiddəti və s. bu kimi kəmiyyətlər bizə məlumdur. Buların hamısı əşya və hadisələrin xassələridir. Əşya və hadisələrin belə xassələrindən birini a ilə işarə edək. Bu xassəyə malik olan əşyalar müəyyən M çoxluğunu əmələ gətirir. Bu halda M çoxluğunun elementləri a kəmiyyətinə malikdir. Məsələn a kütlədirsə, onda M çoxluğu elə əşyalar çoxluğudur ki, bu əşyalar haqqında "kütləy ə malik olmaq" terminin mənası var.

2) Kəmiyyət, əşya və hadisələrin elə xassəsidir ki, bu xassə həmin əşyaları müqayisə etməyə imkan verir. Başqa sözlə M çoxluğunu a xassəsinə nəzərən ekvivalent olan siniflərə bölməyə imkan verən ekvivalentlik binar münasibəti təyin olunur.Məsələn, M çoxluğunda bütün əşyalar uzunluq xassəsinə malik olduqda, eyni uzunluqda olan bütün əşyalar ekvivalentlik sinfi əmələ gətirir.

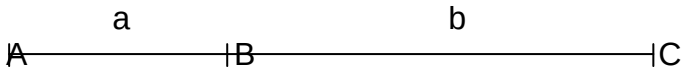
Kəmiyyətlər bircins və bircins olmayan kəmiyyətlər olmaqla iki qrupa bölünür. Müəyyən çoxluğun obyektlərinin eyni xassələrini ifadə edən kəmiyyətlərə bircins kəmiyyətlər deyilir. Obyektlərin müxtəlif xassələrini ifadə edən kəmiyyətlərə isə bircins olmayan kəmiyyətlər deyilir. Məsələn, uzunluq və sahə bircins olmayan kəmiyyətlərdir

Kəmiyyətləri riyazi üsullarla öyrənmək üçün onların ədədlərə xas olan xassələrə malik olduğunu aşkar etmək lazımdır. Bu, həm də kəmiyyətlər üçün miqdar

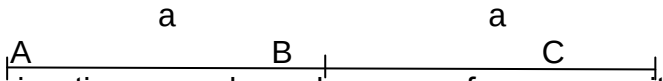
xarakteristikası təyin etmək üçün zəruridir. Bunun üçün kəmiyyətlərin aşağıdakı xarakteristikasını göstərək.

1) İxtiyari iki bircins kəmiyyət müqayisə olunandır. Yəni, iki ixtiyari bircins a və b kəmiyyətləri üçün $a < b, a > b, a = b$ münasibətlərindən biri eyni zamanda doğru ola bilər. Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu bu üçbucağın ixtiyari katetindən böyükdür.

2) İki eyni cinsli kəmiyyəti toplamaq olar və toplamanın nəticəsi həmin cinsdən olan kəmiyyətdir. Başqa sözlə, ixtiyari iki a və b kəmiyyətləri üçün onların cəmi adlanan a+b kəmiyyəti təyin olunur. Məsələn, AB parçasının uzunluğu a, BC parçasının uzunluğu b olduqda, onda AC parçasının uzunluğu AB və BC parçalarının cəminə bərabərdir.




3) Kəmiyyəti həqiqi ədədə vurmaq olar. Nəticədə həmin cinsdən olan kəmiyyət alınır. Doğrudan da, ixtiyari a kəmiyyəti və ixtiyari mənfi olmayan $\alpha$ ədədi üçün onların hasili adlanan yeganə b = a · $\alpha$ kəmiyyəti var. Məsələn, uzunluğu a olan AB parçasını $\alpha = 2$ ədədinə vurduqda uzunluğu 2a olan AC parçasını alırıq.




4) İki eynicinsli kəmiyyəti çıxmaq olar və bu zaman fərq cəm vasitəsilə təyin olunur. Yəni a və b kəmiyyətlərinin fərqi elə c kəmiyyətidir ki, a=b+c münasibəti doğru olsun. Məsələn, AC parçasının uzunluğu a, AB parçasının uzunluğu b olduqda BC parçasının uzunluğu AC və AB parçalarının fərqinə bərabərdir.

5) İki eynicinsli kəmiyyətin birini digərinə bölmək olar. Bu zaman qismət vurma əməli vasitəsilə təyin edilir. Yəni a və b kəmiyyələrinin qisməti elə mənfi olmayan $\alpha$ ədədinə deyilir ki, a = b · $\alpha$ bərabərliyi ödənilsin. Bu halda $\alpha$ ədədini a və b kəmiyyətlərinin nisbəti də adlandırırlar və $\alpha = \frac{a}{b}$ kimi yazılır.Məsələn, AC parçasının uzunluğunun AB parçasının uzunluğuna nisbəti $\alpha = 2 - dir$.

**2**. Kəmiyyət anlayışının meydana gəlməsi və formalaşması prosesi uzun tarixi yol keçmişdir. Belə ki, elmin inkişafı kəmiyyət haqqında ilkin intuitiv təsəvvürlərin dəqiqləşdirilməsi və ümumiləşdirilməsi ilə nəticələnmişdir. Belə ümumiləşdirmələrin nəticəsi olaraq skalyar və
vektorial kəmiyyətlər kimi kəmiyyət tipləri aşkar edilmişdir.

Skalyar kəmiyyət, öz növündən olan ölçü vahidi ilə müqayisəsindən alınan bir ədədlə (ədədi qiyməti ilə) tamamilə təyin olunur. Uzunluq, sahə, həcm, kütlə və s. skalyar kəmiyyətə tipik misal ola bilər. Yuxarıda şərh etdiyimiz kəmiyyətin xarakterik xüsusiyyətləri məhz skalyar kəmiyyətlərə xasdır.

Vektorial kəmiyyətlərin tamamilə təyin olunması üçün bir ədədin verilməsi kifayət deyil. Belə kəmiyyətlərin təyin olunması üçün ədədi qiymətlərindən başqa onların istiqamətləridə göstərilməlidir. Sürət, qüvvə, təcil və s. vektorial kəmiyyətlərə misal ola bilər.

Riyaziyyatın ibtidai kursunda əsasən skalyar kəmiyyətlərə baxılır. Skalyar kəmiyyətlərin ümumi tərifini verək:

**Tərif.** *Seçiliş vahidlər sistemində yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətə skalyar kəmiyyət deyilir.*

Tərifdən görünür ki, skalyar kəmiyyət hadisə və ya əşyanın (obyektin) xassəsidir və bu xassə aid olduğu əşya və ya hadisələrin müqayisəsinə və ekvivalent olmayan iki əşyadan hansının həmin xassəyə daha böyük ölçüdə malik olduğunu təyin etməyə imkan verir.

**3. Tərif.** *Parçanın uzunluğu hər bir verilmiş parça üçün aşağıdakı şərtləri ödəyən müsbət kəmiyyətə deyilir:*

*1) Bərabər parçaların uzunluqları bərabərdir;*

*2) Parça sonlu sayda parçalardan təşkil olunmuşsa, onda onun uzunluğu təşkiledici parçaların uzunluqları cəminə bərabərdir.*

Parçanın uzunluğunun ölçülməsi prosesini izah edək. Parçalar çoxluğundan hər hansı e parçasını seçib, onu uzunluq vahidi qəbul edək. a parçasının başlanğıc nöqtəsindən başlayaraq onun üzərində e parçasına bərabər ardıcıl parçalar ayırıb və bu prosesi mümkün qədər davam etdirək. Əgər e parçasına bərabər parçalar n dəfə ayrıldıqdan sonra sonuncu ayrılmış parçanın uc nöqtəsi ilə a parçasının uc nöqtəsi üst-üstə düşürsə, bu halda a parçasıının qiyməti n ədədinə bərabərdir və bu

a = ne kimi yazılır. Əgər e parçası a üzərində tam dəfə yerləşdikdən sonra e-dən kiçik bir $a_1 < e$ qalığı qalırsa, onda $e_1$ parçasını ölçü vahidi qəbul edib $a_1$ parçası eyni qayda ilə ölçülür.

Parçanın uzunluğunun bir neçə mühüm xassələrini şərh edək.

1) Seçilmiş ölçü vahidində ixtiyari parçanın uzunluğu müsbət həqiqi

ədədlə ifadə olunur və tərsinə, hər bir müsbət həqiqi ədəd üçün uzunluğu bu ədədlə ifadə olunan parça var.

2) İki bərabər parçanın uzunluqlarının ədədi qiymətləri də bərabərdir və tərsinə iki parçanın uzunluqlarının ədədi qiymətləri bərabərdirsə, bu parçalar özləri də bərabərdir.

3) Verilmiş parça bir neçə parçaların cəmindən təşkil olunmuşsa, onda onun uzunluğunun ədədi qiyməti toplananların uzunluqlarının ədədi qiymətlərinin cəminə bərabərdir .

4) Uzunluq ölçü vahidi ondan k dəfə böyük olan (k dəfə kiçik) olan yeni ölçü vahidi ilə əvəz etdikdə ölçülən parçanın uzunluğunun ədədi qiyməti də k dəfə kiçilir (k dəfə böyüyür).

**4**. Məktəb kursunda geniş istifadə edilən uzunluq vahidləri və onlar arasında əlaqələri nəzərdən keçirək.

1) metr 10 desimetrdən ibarətdir və tərsinə, 1 desimetr metrin onda bir hissəsinə bərabərdir.

2) desimetr 10 santimetrdən təşkil olunmuşdur və tərsinə, 1sm desimetrin onda bir hissəsinə bərabərdir.

3) Santimetr 10 millimetrdən təşkil olunmuşdur və tərsinə, 1mm santimetrin onda bir hissəsinə bərabərdir.

Beləliklə, 1m = 10dm = 100sm = 1000mm. Bəzi nəzəri məsələlərdə və tədris təcrübəsində millimetrdən də kiçik olan mikrometr uzunluq vahidindən də istifadə edilir və 1mkm kimi işarə edilir.

1mkm = 0,000001m = 0, 001mm

Həmçinin praktik məsələlərdə metr vahidindən böyük olan kilometr (km), hektometr (hm), dekametr(dekm) vahidlərindən geniş istifadə edilir. Bu vahidlər arasında əlaqə aşağıdakı kimidir:

1dekm = 10m, 1hm =100m, 1km = 1000m. Qeyd edək ki, “deka” on, “hekto” yüz, “kilo” min mənasını verir.

## Mövzu 12. Adlı ədəd anlayışı. Adlı ədədlər və onlar üzərində əməllər.

Plan

1. Adlı ədəd anlayışı. Adlı ədədlərin yazılması.
2. Adlı ədələrin xırdalanması və çevrilməsi.
3. Adlı ədələrin toplanması və çıxılması.
4. Adlı ədələrin adsız ədədə vurulması və bölünməsi.

**1.** Kəmiyyətlərin ölçülməsi prosesinin mahiyyətini nəzərdən keçirdikdə məlum oldu ki, a kəmiyyəti və e ölçü vahidi verildikdə, a kəmiyyətinin ölçülməsi nəticəsində elə müsbət $\alpha$ həqiqi ədədi tapılır ki, a = $\alpha \cdot e$ münasibətinin mənası olsun. Bu halda $\alpha$ ədədi elə a kəmiyyətinin e vahidindəki ədədi qiyməti adlanır.

Aşkardır ki, a kəmiyyətinin cinsi məlum olduqda, məsələn, uzunluq olduqda, e ölçü vahidi də vahid parça olur. Məsələn, 1sm vahid olur. Bu halda $\alpha$ ədədi a parçasının sm vahidində uzunluğun ədədi qiyməti olur və a parçasının uzunluğu a = $\alpha\, sm = \alpha \cdot 1sm$ ədədi ilə ifadə olu-nur.Bu ədədinin əsas xarakterik xüsusiyyəti ondadır ki, bu ədəd hansı konkret kəmiyyətin ölçülməsinin nəticəsi olduğunu və ölçülən kəmiyyətin miqdar xarakteristikasını təyin edir. Belə ki, $\alpha$ müsbət həqiqi ədədi (mücərrəd mənada) a kəmiyyətinin ədədi qiymətini, e = 1sm vahid isə a kəmiyyyətinin cinsini ( uzunluq kəmiyyəti olduğunu) ifadə edir. Həmçinin ümumi halda, a = $\alpha \cdot 1e$ münasibəti göstərir ki, hər bir kəmiyyəti müəyyən mücərrəd ədədlə bu kəmiyyətin ölçü vahidinin hasili şəklində göstərmək olar və ya a = $\alpha \cdot e$ münasibəti göstərir ki, kəmiyyətin ölçülməsinin nəticəsi, yanında ölçü vahidinin adı göstərilmiş ədədlə ifadə edilir. Belə ədədi adlı ədəd adlandırmaq qəbul olunmuşdur.

Şərh etdiyimiz mülahizələrə əsasən adlı ədədi aşağıdakı kimi xarakterizə etmək olar.

Ölçülən konkret kəmiyyətin miqdar xarakteristikasını və bu kəmiyyətin cinsini ifadə edən ədədə **adlı ədəd** deyilir. Məsələn, düz xətt parçası kəmiyyət kimi 48 mm və ya 4,8 sm və ya 4sm 8mm şəklində, sahə, həcm, kütlə vaxt intervalı kəmiyyət kimi uyğun olaraq 4350m$^2$, 0,435ha, 43,5ar, 4kq 250q, 4,25kq, 4saat32dəq, 275dəq şəklində ifadə oluna bilər. Harda ki, 48; 4350; 43,5; 4,25; 272 ədədləri verilmiş kəmiyyətin neçə olçü vahidindən və onların bərabər paylarından ibarət olduğunu, mm, m$^2$, ar, kq, dəq isə kəmiyyəti ölçmək üçün hansı ölçü vahidinin qəbul edildiyini göstərir.Adlı ədədləri yazılış formalarına görə iki növə ayırırlar:

1. Bir ölçü vahidi ilə yazılmış adlı ədədlər (sadə adlı ədədlər).
2. Çox ölçü vahidi ilə yazılmış adlı ədədlər (mürəkkəb adlı ədədlər).

Bu növləri misallar üzərində aydınlaşdıraq.

Tutaq ki, düz xətt parçasının uzunluğunu 1mm ölçü vahidi ilə ölçdükdə 1mm-lik parça ölçülən parçanın üzərində 48 tam dəfə yerləşir. Onda bu parçanın uzunluğu yalnız 1mm vahidi ilə ifadə olunur və 48 mm adlı ədədi şəklində yazılır. Həmin parçanın uzunluğu 1sm ölçü vahidi ilə ölçüldükdə isə onun uzunluğu iki uzunuq vahidləri vasitəsilə ifadə olunan 4sm 8mm adlı ədədi şəklində yazılır. Həmçinin, 4,25kq və 4kq 250q eyni adlı ədədləri həm bir ölçü vahidində, həm də eyni cinsli iki ölçü vahidlərində yazmaq olar. 48mm, 4,25 kq adlı ədədləri birölçülü, 4sm 8mm, 4kq 250q ədədləri isə çox ölçülüadlı ədədlərdir.

**2.** Sayma texnikası sonlu çoxluqların müqayisə edilməsini onların güclərini göstərən uyğun natural ədədlərin müqayisəsi ilə əvəz etməyə imkan verdiyi kimi, ölçmə texnikası da kəmiyyətlərin müqayisəsini onların uyğun ədədi qiymətlərini ifadə edən adlı ədədlərin müqayisəsi ilə əvəz etməyə imkan verir. Bu halda meydana çıxan əsas çətinlik, bircins kəmiyyətlərin müxtəlif ölçü vahidləri ilə ölçülməsi nəticəsində müxtəlif adlı ədədlərin

meydana gəlməsi ilə bağlı ola bilər. Lakin, bu çətinlik bir ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədin digər ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədə çevrilməsi ilə asanlıqla aradan qaldırılır. Bu halda aşağıdakı iki növ çevirmədən istifadə etmək lazım gəlir.

1) Verilmiş ölçü vahidindən kiçik ölçü vahidinə keçmək. Belə çevirmə **adlı ədədin xırdalanması** adlanır.

2) Verilmiş ölçü vahidindən böyük ölçü vahidinə keçmək. Belə keçid **adlı ədədin çevrilməsi** adlanır.

Beləliklə, müəyyən kəmiyyəti xarakterizə edən adlı ədədin xırdalanması, bu adlı ədədin həmin kəmiyyəti xarakterizə edən kiçik ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədlə ifadə edilməsi deməkdir.

Məsələn, 4km = $4 \cdot 1000m = (4 \cdot 1000) \cdot 1m = 4000 \cdot 1m = 4000m$

İndi 2-ci növ çevirmənin mənasını açıqlayaq. Müəyyən kəmiyyəti xarakterizə edən adlı ədədin çevrilməsi bu ədədin həmin kəmiyyəti xarakterizə edən böyük ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədlə ifadə edilməsi deməkdir. Məsələn, qram vahidi ilə verilmiş 3150q adlı ədədini kq vahidi ilə verilmiş adlı ədədə çevirək.

1q = 0,001kq olduğundan, harda ki, 0,001 = 1q : $1kq$ nisbətidir.

3150q=$3150 \cdot (0{,}001kq) = (3150 \cdot 0{,}001) \cdot 1kq = 3{,}150 \cdot 1kq = 3{,}150$kq.

Qeyd edək ki, adlı ədədlərin xırdalanması və çevrilməsinə aid praktik çalışmaları asanlıqla icra etmək üçün bircins kəmiyyətlərin ölçü vahidləri arasında riyazi münasibətləri bilmək kifayətdir.

3. Adlı ədədlər üzərində toplama və çıxma əməllərinin icra edilməsi məlum qaydalara əsaslanır. Sadəcə adlı ədədlər üzərində bu əməllərin icrası zamanı adlı ədədlərin xüsusiyyətini nəzərə almaq lazımdır. Yəni nəzərə almaq lazımdır ki, elə adlı ədədləri toplamaq və ya çıxmaq olar ki, əməl nəticələrinin mənası olsun. Aşkardır ki, adlı ədədlərin cəminin və fərqinin o vaxt mənası var ki, həmin ədədələr bircins kəmiyyətləri xarakterizə etmiş olsun( bircins ölçü vahidləri ilə verilsin). Onda aşkardır ki, mücərrəd (adsız) ədədlə adlı ədədin cəminin və ya fərqinin, həmçinin müxtəlif cinsli kəmiyyətləri xarakterizə edən adlı ədədlərin cəminə və ya fərqinə həmişə məna vermək mümkün deyil.

*Tərif.1) Verilmiş iki adlı ədəd vasitəsilə xarakterizə olunan kəmiyyətlərin cəminə bərabər olan kəmiyyəti xarakterizə edən üçüncü adlı ədədə verilmiş adlı ədədlərin cəmi deyilir.*

*2) Adlı ədədlərin cəmini tapmaq əməlinə adlı ədədlərin toplanması deyilir.*

Məsələn, 724km + 277km = 724·1km + 277·1km = (724+277)·1km = =1001·1km = 1001km

*Qayda 1.Eyni ölçü vahidi ilə verilmiş iki adlı ədədi toplamaq üçün onların mücərrəd (adsız) vuruqlarını toplamaq, nəticənin yanında ortaq ölçü vahidini yazmaq lazımdır.*

Adlı ədədlər üçün də çıxma əməli adlı ədədlərin toplanması əməlinin tərs əməli kimi təyin edilir.

*Tərif. İki adlı ədədin cəminə və bu ədədlərin birinə görə o biri adlı ədədin tapılması əməlinə* ***adlı ədədlərin çıxılması*** *deyilir.*

Məsələn, 1955 il =x il +1147 il = (x+1147) il. Buradan da, 1955 = x+1147 və ya x = 1955-1147. Deməli, 1955 il – 1147il = (1955-1147) il = 808 il.

*Qayda 2. Eyni ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədləri çıxmaq üçün azalanın mücərrəd vuruğundan çıxıılanın mücərrəd vuruğunu çıxıb, alınan fərqin yanında ortaq ölçü vahidini yazmaq lazımdır.*

Biz eyni vahidlə verilmiş birhədli adlı ədədlərin toplanması və çıxılması qaydalarına baxdıq. İndi tutaq ki, verilmiş birhədli adlı ədədlər müxtəlif bircins ölçü vahidlərində verilmişdir. Bu halda, verilmiş adlı ədədləri yuxarıda şərh edilmiş qaydalara əsasən ya xırdalamaqla, ya da çevirməklə bir ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədlərə gətirmək kifayətdir.

Məsələn, 0,30m+13sm = 0,30m +0,13 m =0,43m və ya

0,30m+13sm = 30sm + 13sm = 43sm

Çıxma əməli də analoji qayda ilə icra edilir.

*Qayda 3. Müxtəlif bircins ölçü vahidləri ilə verilmiş birhədli adlı ədədləri toplamaq və çıxmaq üçün əvvəlcə komponentləri xırdalamaqla və ya çevirməklə onları eyni ölçü vahidi ilə verilmiş adlı ədədlərə gətirmək lazımdır.*

Birhədli adlı ədədlərin üzərində toplama və çıxma əməllərinin keçirdiyimiz bu qaydaları komponentləri çoxhədli adlı ədədlər olan hal üçün də doğrudur. Yalnız əvvəlcə komponentləri məlum xırdalamaq və çevirmək qaydası ilə birhədli adlı ədədlərə gətirmək və ya onları hədbə-hədd toplamaq və çıxmaq lazımdır.

Məsələn,

1) 5km230m + 6km420m = 5230m + 6420m = (5230+6420)m = =11650m=11km650m və ya

5km230m + 6km420m = (5+6)km +(230+430)m = 11km650m

2)12kq30q – 4kq240q = 12,030kq – 4,240kq = ( 12,030-4,240)*1kq= 7,790kq

12kq30q – 4kq240q = 12030q – 4240q =(1203-4240)*1q= 7790q = 7,790kq

**4.** Adlı ədədlərin adsız ədədə vurulması və bölünməsi üçün heç bir qaydanın tətbiq edilməsinə ehtiyac yoxdur. Bu qaydalar kəmiyyətlərin ədədə vurulması və bölünməsi qaydalarının analoqudur. a kəmiyyətinin e vahidindəki ədədi qiymətinin $m_e(a)$ kimi işarə edək. $m_e(a)$ ədədi $m_e(a)=x$ şəklində ədəddir harda ki, $x>0$ ədədi a kəmiyyətinin ədədi qiymətidir. a kəmiyyətinin ədədə vurulması və bölünməsi üçün isə onun ədədi qiymətini bu ədədə vurmaq və bölmək kifayətdir.

Tutaq ki, e ölçü vahidində x*e birölçülü adlı ədədi verilmişdir və $\alpha$ ixtiyari adsız ədəddir. Onda $\alpha$*xe = ($\alpha$ ·x)·1e=($\alpha$·x) · e.

Məsələn, $\frac{2}{3}$ · (4,2sm) = ($\frac{2}{3}$· 4,2)·1sm=(1,4·2)sm=2,8sm

*Qayda1. Adlı ədədin adsız ədədə vurulması iki adsız ədədin vurulmasına gətirilir və hasilinin yanında verilmiş ölçü vahidi yazılır.*

Adlı ədədin adsız ədədə bölünməsi isə adlı ədədin adsız ədədə vurulması əməlinə gətirilir.

*Qayda 2. Adlı ədədi adsız ədədə bölmək iki adsız ədədin qismətinə gətirilir və alınan qismətin yanında verilmiş ölçü vahidi yazılır.*

Məsələn, 5,4kq :$\frac{2}{3}$ = (5,4kq) · $\frac{3}{2}$ = (5,4· $\frac{3}{2}$)$kq = (2{,}7 \cdot 3)kq = 8{,}1kq$

## Mövzu 13. Təqribi ədəd anlayışı. Təqribi ədədin onluq işarələri və qiymətli rəqəmlərinin sayı. Ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması.

Plan

1. Dəqiq və təqribi ədədlər. Xəta anlayışı. Xətaların mənbəyi.
2. Təqribi ədədlərin onluq işarələri və qiymətli rəqəmlərinin sayı.
3. Ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması.
4. Təqribi hesablamalar.

**1**. Təbiətdəki proses və hadisələrin tabe olduqları əsas qanunları öyrənmək üçün onları ifadə edən riyazi məsələ və münasibətləri tədqiq etmək lazım gəlir. Hər bir riyazi məsələni həll etməzdən əvvəl onun həllinin varlığını, yeganəliyini və dayanıqlığını müəyyən edirlər. Sonra isə həmin məsələnin həlini tapmağa çalışırlar. Bir çox məsələlərin həllini bəzən dəqiq və aşkar şəkildə tapmaq olmur.

Beləliklə, riyazi məsələlərin həlli zamanı həm dəqiq, həm də təqribi ədədlər üzərində müəyyən riyazi əməllərin icra edilməsi zərurəti yaranır. Xüsusilə bu hal ölçmə prosesi ilə bağlı məsələlər üçün daha çox xarakterikdir. Dəqiq ədəd dedikdə kəmiyyətin doğru ədədi qiymətini ifadə edən ədəd, təqribi ədəd dedikdə isə həqiqi qiymətə kifayət qədər yaxın olan ədəd başa düşülür. Bu halda təqribi qiymətin dəqiq qiymətə yaxınlıq dərəcəsi hesablamanın xətası ilə müəyyən edilir. Məsələn, “kubun üzlərinin sayı 6-dır”, “kitabın 325 səhifəsi var” təkliflərində 6 və 325 ədədləri dəqiq ədədlərdir. “Otağın eni 8,25 m-dir”, “Yerin radiusu 6300 km-dir” təkliflərində 8,25 və 6300 ədədləri təqribi ədədlərdir. Bu zaman alınan ədədlərin təqribi olması ölçü alətlərinin mükəmməl olmaması ilə bağlıdır. Ümumiyyətlə mütləq dəqiq olan ölçü cihazı yoxdur. Yalnız bir ölçü cihazının dəqiqliyi digərindən yaxşı ola bilər. Yəni hər bir ölçü cihazının öz dəqiqlik dərəcəsi (öz xətası) var. Bəzi hallarda eyni bir ədəd həm dəqiq, həm də təqribi ola bilər. Məsələn, üçbucağın tərəflərinin sayını göstərən 3 ədədi dəqiq, $S = \pi r^2$ düsturunda $\pi$-nin əvəzinə 3 götürdükdə 3 təqribi ədəd olur.

Beləliklə, xətaların yaranmasının mühüm mənbələrindən biri ölçü alətlərinin mütləq dəqiq olmamasıdır. Xətaların yaranmasının digər mənbəyi də var. Məsələn, riyazi əməllərdə iştirak edən ədəd rasional ədəd olduqda və bu ədədi onluq kəsr şəklində yazmaq lazım gəldikdə, onun üçün dəqiq qiymət tapmaq mümkün deyil. Bu halda həmin ədədi bu ədədin onluq yaxınlaşması adlanan sonlu kəsrlə (sonlu sayda onluq işarəni saxlayıb qalanlarını atmaqla) əvəz etmək lazım gəlir.

Bu halda meydana gələn xətanın mənbəyi yuvarlaqlaşdırma xətası və ya hesablama xətası adlanan xətadır. Xətaların meydana gəlməsinin üçüncü mühüm mənbəyi baxılan məsələnin həlli üsulunun xətasıdır. Bu o vaxt olur ki, baxılan məsələnin ilkin qoyuluşu mürəkkəb olur. Onu daha sadə üsulla həll olunan müəyyən qədər sadə məsələ ilə əvəz edirlər və nəticədə həll üsulunun özündə xətaya yol verilmiş olur.

**2.** Aşkardır ki,təqribiədədin dəqiqilik dərəcəsi onluq işarələrin sayı ilə müəyyən edilir. Məsələn, x təqribi ədədinin 41,453 qiyməti onun 41,45 qiymətindən daha dəqiqidir.

Təqribi ədədin dəqiqlik xarakteristikasının onun onluq işarələrinin sayı kimi təyin edilməsi üsulu ilə yanaşı, dəqiqlik xarakteristikası kimi onun qiymətli rəqəmlərinin sayının göstərilməsi üsulundan da istifadə edilir.

Təqribi ədədlər üzərində əməllər yerinə yetirərkən, əlverişli olsun deyə yuvarlaqlaşdırmadan istifadə olunur. Bu əsasən ədədin çox kiçik onluq hissələrinin atılmasına aiddir. Onluq kəsrləri yuvarlaqlaşdırarkən, onun dəqiqliyi dəyişir. Bu işdə əsas rolu ədədin onluq işarələri və qiymətli rəqəmləri oynayır.

**Tərif.** Onluq kəsrin vergüldən sağda duran bütün rəqəmlərinin sayına onun onluq işarələri sayı deyilir. Məsələn, 0,425 ədədində üç onluq işarə var.
**Tərif.** Onluq kəsrinvə ya təqribi ədədin sıfırdan fərqli ilk rəqəmindən solda və ədədin sonunda məlum olmayan rəqəmlərin yerinə yazılmış sıfırlar və ya yuvarlaqlaşdırma nəticəsində yazılan sıfırlardan fərqli bütün rəqəmlərinə onun qiymətli rəqəmləri deyilir. Məsələn, 0,402 ədədində üç qiymətli rəqəm, 4,0045 ədədində beş qiymətli rəqəm, 0,021 ədədində iki qiymətli rəqəm vardır.
Təqribi ədədin yazılışına daxil olan (yəni, sıfırdan fərqli rəqəmin əvvəlində duran və ədədin sonunda məchul rəqəmlər əvəzinə qoyulan) və onun onluq rəqəmlərini göstərmək üçün istifadə olunan sıfırlar həmin ədədin qiymətli rəqəmləri hesab olunmur.
Məsələn, 0,00013 ədədində 1-dən əvvəl yazılan sıfırlar qiymətli rəqəmlər hesab olunmur. Bu ədədin iki qiymətli rəqəmi (1,3) vardır. 0,3560 ədədində 3-dən əvvəl yazılan sıfır qiymətli rəqəm deyildir. 6-dan sonra sonra gələn sıfır isə həmin ədəddəki $10^{-4}$ mərtəbəsinin saxlanıldığını göstərir.
**3.** Tutaq ki, onluq kəsr şəklində göstərilmiş təqribi a ədədi verilmişdir. Bu ədədi az sayda qiymətli rəqəmi olan başqa bir ədədlə əvəz etmək üçün yuvarlaqlaşdırmadan istifadə olunur. Verilmiş ədədi yuvarlaqlaşdırmaq, onun bir və ya bir neçə sonuncu onluq rəqəmini atmaq, ədədin kəsr hissəsi olmadıqda isə onun bir və ya bir neçə sonuncu rəqəmini sıfırla əvəz etmək deməkdir.

Hesablama təcrübəsində ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması, ədədin bu ədədə yaxın, lakin daha az sayda onluq işarəsi olan ədədlə əvəz edilməsi zərurəti meydana çıxır. Müəyyən onluq işarədən sonrakı onluq işarəni atıb, həmin onluq işarənin üzərinə 1 əlavə etməklə yuvarlaqlaşdırma artığı ilə, həmin onluq işarədən sağdakı ədədləri atmaqla (və ya onları sıfırla əvəz etməklə) edilən yuvarlaqlaşdırma isə əskiyi ilə yuvarlaqlaşdırma adlanır. Tətbiq edilən yuvarlaqlaşdırma qaydalarını göstərək:

1) Ədədin atılan rəqəmlərinin birincisi 5-dən kiçik olduqda qalan rəqəmlər dəyişilmədən saxlanılır. Məsələn, 36,832 ədədini yüzdə birə qədər yuvarlaqlaşdırsaq, 36,83 alarıq.

2) Ədədin atılan rəqəmlərinin birincisi 5-dən böyük olduqda qalan rəqəmlərin axırıncısının üzərinə bir əlavə olunur. Məsələn, 75,3869 ədədini mində birə qədər yuvarlaqlaşdırsaq, 75,387 alarıq.

3) Ədədin atılan rəqəmlərinin birincisi 5, başqa atılan rəqəmlər içərisində isə sıfırdan fərqli rəqəmlər olduqda, qalan rəqəmlərin axırıncısının üzərinə bir əlavə olunur. Məsələn, 3,2547 ədədini onda birlərə qədər yuvarlaqlaşdırsaq, 3,3 alarıq.

4) Ədədin atılan rəqəmlərinin birincisi 5, atılan başqa rəqəmlərin hamısı sıfır olduqda, qalan axırıncı rəqəm cüt olduqda onun özü dəyişilmədən saxlanılır, tək olduqda isə onun üzərinə 1 əlavə olunur. Məsələn, x=7,388500 və y=7,38750 ədədlərini mində birə qədər yuvarlaqlaşdırsaq, x=7,388 və y=7,388 ədədlərini alarıq.

**4.** Hesablama zamanı hesablama xətalarının ciddi hesablanması icra edilmirsə, onda rəqəmlərin sayılması üsulu deyilən üsuldan istifadə edilməsi tövsiyə edilir. Bu üsula görə nəticələr elə yuvarlaqlaşdırılır ki, yekun nəticə üçün verilmiş dəqiqlik təmin edilsin.
Təqribi ədədlər üzərində əmelləri yerinə yetirərkən iki qaydaya əməl edilir:
**Qayda 1.** Onluq işarələri sayı müxtəlif olan təqribi ədədləri topladıqda və ya çıxdıqda , alınan nəticədə saxlanılan onluq işarələrinin sayı – ən az sayda onluq işarələri olan ədəddəki qədər olmalıdır. Məsələn, 1) 3,836+2,75 = 6,586 ≈ 6,59 2) 5,48 - 2,2 = 3,28 ≈ 3,3.
**Qayda 2.** Təqribi ədədləri vurduqda və ya böldükdə, nəticədə saxlanılan qiymətli rəqəmlərin sayı, ən az sayda qiymətli rəqəmləri olan ədəddəki qədər olmalıdır.
Məsələn, $0{,}33 \cdot 1{,}27 = 0{,}4191 \approx 0{,}422{,}794 : 1{,}1 = 2{,}54 \approx 2{,}5$

## Mövzu 14. Həndəsənin yaranma tarixi. Ən sadə həndəsi fiqurlar və onların xassələri.

Plan

1. Həndəsənin yaranması haqqında tarixi məlumat.
2. Həndəsənin metodları və məzmunu.
3. Ən sadə həndəsi fiqurlar və onların xassələri.

**1.** Həndəsə fəzanın müəyyən çevirmələr zamanı dəyişməz qalan forma və xassələrini öyrənir. Həndəsə yunanca *geometriya* sözündən götürülüb, *geo –yer, metriya* – ölçmək mənasındadır. Bu ad həndəsənin yer ölçmə işləri ilə əlaqədar olaraq meydana gəlməsinin nəticəsidir. Həndəsə bir riyazi elm kimi həndəsi fiqur və cisimlərin fəza formaları, ölçüləri və bunlar arasındakı qarşılıqlı münasbətlərdən bəhs edir.

Həndəsə ən qədim elmlərdən biri olub, digər təbiət elmləri kimi o da insanların gündəlik praktik fəaliyyətlərinin ehtiyacları nəticəsində meydana gəlmişdir. Çünki həndəsə özünün inkişafının ilkin mərhələsində əsasən insanların praktik məqsədlərinə xidmət etmişdir. Belə ki, həndəsənin yaranması torpaq sahələrinin ölçülməsi və bölgüsü, yolların salınması, evlərin tikintisi və digər quruculuq işləri üçün zəruri olan ölçmə işləri ilə bağlı olmuşdur.

Bizə gəlib çatmış olan maddi mədəniyyət abidələri və çoxlu yazı sənədləri göstərir ki, artıq 4000 il bundan əvvəl Misir və Babilistan sakinlərinin xeyli həndəsi məlumatları var idi. Məsələn, Misir piramidaları maraqlı düzgün formaları ilə fərqlənir. Aydındır ki, bu piramidaların tikintisinə yalnız həndəsi biliklərə malik adamlar rəhbərlik edə bilərdi.

Həndəsənin riyazi elm kimi formalaşması çox gec baş vermiş və bu formalaşma qədim yunan alimləri Fales (b.e.ə. 639-548 illər), Pifaqor (b.e.ə. 580-500) , Demokrit (b.e.ə. 480-370) və başqalarının adı ilə bağlı olmuşdur.

Həndəsi faktların ilk isbatı Miletli Falesin adı ilə bağlıdır. Lakin, Falesin hansı mühakimə qaydasını tətbiq etməsini biz yalnız güman edə bilərik.

Hədəsənin inkişaf tarixi dörd dövrə bölünür. I dövr yeni eradan əvvəl VI əsrədək olan dövrdür. Bu dövr həndəsəyə aid faktların toplanması və onlar arasında sadə asılılıqların müəyyən edilməsi dövrüdür. Burada həndəsəyə aid ilk məlumatlar tədricən Misir, Babilistan və Yunanıstandan keçir, bəzi faktlar məntiqi üsulla əsaslandırılır.

II dövr yeni eradan əvvəlki VI əsrdən, yeni eranın XVII əsrinədək davam edən 2000 ildən çox bir dövrü əhatə edir. Yunan alimləri Arximed, Evklid, Apollon və Eratosfenin yaşadığı III əsr (y.e.ə.) riyaziyyatın inkişaf tarixinə qızıl əsr kimi daxil olmuşdur. Bu dövrün mühüm nailiyyətlərindən biri əsas dünya dillərinə tərcümə edilmiş və dəfələrlə təkrar nəşr olunmuş “Başlanğıclar” əsərinin yaranmasıdır. Hələ indiyidək bəzi ölkələrdə bu kitab dərslik kimi istıfadə olunur. Öyrəndiyimiz həndəsi faktların çoxu həmin əsərdə vardır. Evklid 13 kitabdan ibarət Başlanğıclar” əsərini yazarkən, özünə qədər olan həndəsi faktları sistemləşdirmiş və ümumiləşdirmişdir.

III dövr fransız alimi Rene Dekartın (1596-1650) dəyişən kəmiyyətlər və koordinatlar üsulunu riyaziyyata daxil etməsi ilə başlanır. Bu dövrdə həndəsə çox sürətlə inkişaf etmiş və yeni, daha ümumi araşdırma üsulları müəyyən edilmişdir.

IV dövr 1826-cı böyük rus alimi N.Lobaçevskinin (1793-1856) yeni kəşf etdiyi həndəsə ilə başlanır. Ən mühüm elmi nailiyyətlər, məhz bu dövrə aiddir.Təkçə onu qeyd etmək kifayətdir ki, Evklid həndəsəsi, Lobaçevski həndəsəsinin xüsusi halıdır. Bu dövrdə Lobaçevskidən sonra alman riyaziyyatçısı Riman (1826-1866) Evklid və

Lobaçevski həndəsəsindən fərqli yeni həndəsə yaratdı. Onun mahiyyəti həndəsəni hipotezlər üzərində qurmaqdan ibarət idi.

Hal-hazırda həndəsə elminin "Qeyri-Evklid həndəsə", "Proyektiv həndəsə", "Tərsimi həndəsə", " Analitik həndəsə", "Diferensial həndəsə" kimi müstəqil sahələri yaranmışdır. Bu fənlərin heç biri məktəbdə öyrənilməsə də, onların hər birinin məktəb həndəsə kursu ilə bu və ya digər dərəcədə əlaqəsi var.

**2.** Həndəsə öz inkişafının birinci mərhələsində ətraf fəzanın xassələrini xarakterizə edən faktlartların toplanması ilə məşğul olmuş, belə faktlar arasındakı münasibətləri öyrənmiş və aşkar edilmiş qanunauyğunluqları təhlil edərək ümumiləşdirmişdir. Beləliklə, mücərrəd mənada, həndəsə fəzanın müəyyən dəyilməz forma və xassələrini öyrənir.

Həndəsədə qəbul edilmiş bütün teminlər hər bir həndəsi anlayışın real əşyaların mücərrədləşdirilməsi yolu ilə meydana gəldiyini sübut edir. Məsələn, "xətt" termini "linum" latın sözündən alınmış və Lobaçevskiyə görə "kətan sap" mənasını verir.

Həndəsədə digər təbiət elmlərinə nəzərən erkən rasional tədqiq metodu olan "deduktiv" (ümumidən xüsusiyə mühakimə-isbat metodu) metodun tətbiqi mümkün olmuşdur. "İnduktiv" (bütün xüsusi hallardan ümumi nəticələrin çıxarılması, başqa xüsusidən ümumiyə mühakimə üsulu) metod isə əsasən müəyyən elmlərdə əsas metod olmuşdur. Deduksiyadan istifadə edilməsi imkanı onunla nəticələndi ki, adamlar tərəfindən aşkar edilən əlaqələr tədricən məntiqi nəticələrin çıxarılmasına gətirdi və bir təklifdən digərinin alınması kimi isbat üsulları yarandı. Bununla da, həndəsə riyazi nəzəriyyəyə çevrildi. Həndəsənin məntiqi elm kimi riyazi nəzəriyyə səviyyəsində formalaşması 2500 il əvvəl baş verdi.

Həndəsənin məntiqi elm kimi formalaşması həndəsənin anlayışlar sisteminin daxil edilməsindən əhəmiyyətli dərəcədə asılı olmuşdur. Anlayışı təyin etmək həmin anlayışın əhatə etdiyi obyektlər sinfini dəqiq ayırmaq deməkdir. Bunun üçün isə təyin olunan anlayışın bütün əsas xassələrini bilmək və verilmiş obyektin bütün bu xassələrə malik olub-olmadığını yoxlamaq lazımdır.

Həndəsə kursunda "nöqtə", "düz xətt", "müstəvi" anlayışları əsas anlayışlar kimi ayrılmışdır. Bu xüsusi seçilmiş həndəsi anlayışlardan başqa bütün riyaziyyat üçün ümumi olan "çoxluq", "ədəd" və s. ilkin anlayışlardan da həndəsədə geniş istifadə edilir.

**3.** Həndəsə kursu iki bölmədən ibarətdir: 1. Planimetriya 2. Stereometriya.

*Həndəsənin, bütün hissələri bir müstəvi üzərində yerləşən fiqurların xassələrini öyrənən bölməsinə planimetriya deyilir.*

*Həndəsənin, bütün hissələri bir müstəvi üzərində yerləşməyən fiqurların xassələrini öyrənən bölməsinə stereometriya deyilir.*

Riyaziyyatın ibtidai kursunda əsasən həndəsənin planimetriya hissəsinə aid anlayışlar sistemi öyrənilir. Bunu nəzərə alaraq, bütün nöqtələri bir müstəvi üzərində olan fiqurları – planimetrik fiqurları şərh edək.

Müəyyən qayda ilə düzülmüş nöqtə, xətt, səth ayrılıqda və ya birgə götürüldükdə həndəsi fiqur əmələ gətirir. Həndəsi fiqur anlayışı əşyanın ölçü və formasından başqa, qalan bütün real xassələrini nəzərə almadığından mücərrəd anlayışdır. Həndəsi fiqur istənilən şəkildə ola bilər. Lakin həmin həndəsi fiqurun fiziki xassələri, yəni rəngi, hazırlandığı materialın növü və s. nəzərə alınmır. Onda həndəsi fiqura aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

***Tərif. İxtiyari boş olmayan nöqtələr çoxluğuna həndəsi fiqur deyilir.***

Deməli, nöqtə, düz xətt, müstəvilər ayrılıqda və ya bir-biri ilə birləşmiş şəkildə götürüldükdə həndəsi fiqur əmələ gətirir. İxtiyari həndəsi fiqurun hissəsi də həndəsi fiqurdur. Qeyd edək ki, həndəsi cism, fəzadan səthlə, səthin hissəsi qonşu hissədən xətlə, xəttin hissəsi isə qonşu hissədən nöqtə ilə ayrılır. *Nöqtə və düz xətt.* Həndəsənin əsas anlayişları nöqtə və düz xətdir. Bu anlayişlar ilkin olduğundan onlara tərif verilmir.

Qələmin ucunun kağızda buraxdığı iz nöqtə təsəvvürü verir. Nöqtə latın əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə edilir. Məsələn, A,B,C....

Xətt nöqtələr çoxluğu olub, sonsuzdur. Hərəkət edən nöqtənin izini xətt kimi təsəvvür etmək olar. Tarım çəkilmiş ip düz xətt təsəvvürünü verir. Düz xətt ümumi şəkildə iki

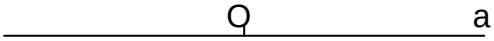
nöqtə ilə göstərilir və latın əlifbasının iki böyük hərfi və ya bir kiçik hərfi ilə işarə edilir. Məsələn, AB, DC ....və ya a, b, c.... Düz xətt sonsuzdur. Yəni düz xəttin başlanğıc və son nöqtəsi yoxdur.

Nöqtə və düz xəttin qarşılıqlı vəziyyətini səciyyələndirən aşağıdakı xassələri vardır:

1. Hər hansı düz xətt üzərində olan nöqtələr və onun üzərində olmayan nöqtələr nöqtələr var.
2. Hər hansı iki nöqtədən yalnız və yalnız bir düz xətt keçirmək olar.
3. Düz xətt üzərində hər hansı üç nöqtədən bir və yalnız biri qalan ikisi arasında yerləşir.
4. İki müxtəlif düz xətt ya kəsişmir, ya da ancaq bir nöqtədə kəsişirlər.

*Şüa və parça.* a düz xətt üzərində ixtiyari O nöqtəsini qeyd edək. O nöqtəsi a düz xəttini iki hissəyə ayırır. Bu hissələrin hər biri yarım düz xətt və ya şüa, O nöqtəsi isə bu şüaların başlanğıc nöqtəsi adlanır. Onda şüanın tərifini aşağıdakı kimi vermək olar:

***Tərif.*** *Düz xəttin verilmiş nöqtəsindən bir tərəfdə olan bütün nöqtələrindən ibarət hissəsinə şüa deyilir.*




Tərifə görə hər bir nöqtə düz xətti iki şüaya ayırır və O nöqtəsi bu şüaların ortaq başlanğıcı adlanır. Şüa da düz xətt kimi latın əlifbasının kiçik hərfi (məsələn, a şüası) , ya da birinci nöqtə şüanın başlanğıc nöqtəsi, ikinci nöqtə isə bu şüanın başlanğıc nöqtədən fərqli ixtiyari nöqtəsi olan iki böyük latın hərfi ilə (məsələn, OA şüası) işarə edilir.

***Tərif.*** *Düz xəttin iki tərəfdən məhdud edilmiş hissəsinə düz xətt parçası və ya sadəcə olaraq parça deyilir.* Düz xətt parçasının başlanğıc və son nöqtələri bu parçanın özünə daxildir.

AB nöqtələri parçanın ucları adlanır. Parçanın ucları arasındakı məsafəyə onun uzunluğu deyilir. Uzunluqları eyni olan parçalara bərabər parçalar deyilir. Belə parçaları bir-birinin üzərinə qoyduqda onların başlanğıc və son nöqtələri üst-üstə düşür. Parçaların bərabərliyi AB=CD kimi yazılır.

Parçaların ölçülməsi xassəsi: Hər bir parçanın sıfırdan böyük müəyyən uzunluğu var, yəni uzunluq vahidi seçməklə hər bir parçanın uzunluğunu ölçmək olar.

Parçaların toplanması xassəsi: Parçanın uzunluğu, onun hər hansı daxili nöqtəsi ilə bölündüyü parçaların uzunluqları cəminə bərabərdir. Parçanın daxili nöqtəsi onu iki bərabər parçaya bölürsə, bu nöqtəyə həmin parçanın orta nöqtəsi deyilir. AB parçasının uzunluğuna A və B nöqtələri arasındakı məsafə də deyilir. A və B nöqtələri üst-üstə düşdükdə onlar arasında məsafə sıfır hesab olunur.

Parçaların ayrılması xassəsi: Şüanın başlanğıcından, uzunluğu verilmiş, bir və yalnız bir parça ayırmaq olar.

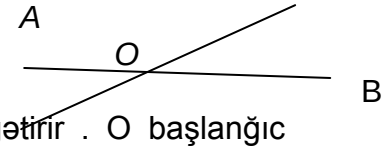
*Müstəvi.* Müstəvi də həndəsədə ilk anlayışlardan olduğuna görə ona tərif verilmir. Stolun səthini, sakit havada gölün səthini, pəncərə şüşəsini və s. müstəvi kimi təsəvvür etmək olar. Müstəvilər adətən yunan əlifbasının hərfləri ilə işarə olunur: $\alpha, \beta, \gamma$.

Müstəvi və düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti haqqında aşağıdakı xassələri qeyd edək: 1. İki nöqtəsi müstəvi üzərində olan düz xətt bütünlükdə həmin müstəvi üzərindədir. 2.

Müstəvi üzərində yerləşən düz xətt, bu müstəvini hər biri yarımmüstəvi adlanan iki hissəyə bölür.

*Bucaq.*

***Tərif**. Nöqtə və bu nöqtədən çıxan iki müxtəlif şüanın əmələ gətirdiyi fiqura bucaq deyilir.*

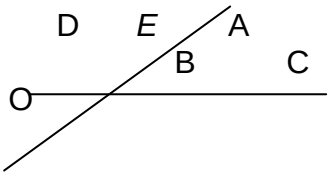



Deməli, ortaq başlanğıclı iki OA və OB şüaları bucaq əmələ gətirir . O başlanğıc nöqtəsi bucağın təpəsi, həmin şüalara isə bucağın tərəfləri deyilir. Bucaq təpədə qoyulmuş bir hərflə və ya təpədə və tərəflərdə qoyulmuş üç hərflə oxunur. Məsələn, $\angle O$ $v$ $ya$ $\angle AOB$ kimi yazılır.

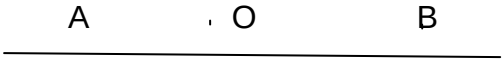
Iki bucaq bir-birinin üzərinə qoyulduqda üst-üstə düşərsə, bu bucaqlar bərabər hesab olunur. Bucaqlar transportirin köməyi ilə dərəcələrlə ölçülür. Bucaqların ölçülməsinin aşağıdakı xassələri vardır:

1. Hər bir bucağın sıfırdan böyük dərəcə ölçüsü vardır. 2. Bucağın dərəcə ölçüsü , onun daxili şüası ilə bölündüyü bucaqların dərəcə ölçüləri cəminə bərabərdir.

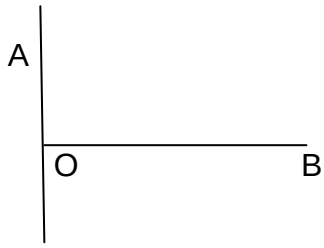
Hər bir bucaq müstəvini iki hissəyə bölür. Bu hissələrdən biri bucağın tərəfləri arasında yerləşən bütün nöqtələr çoxluğundan, digəri isə tərəflərin xaricində yerləşən nöqtələr çoxluğundan ibarətdir. Bucağın təpəsi və tərəfləri bu hissələrin heç birinə aid edilmir və bu iki hissənin sərhəd nöqtələri çoxluğunu təşkil edir. Birinci hissə buçağın daxili oblastı, ikinci hissə isə bucağın xarici oblastı adlanır. Şəkildə A,B,C nöqtələri daxili, D,E nöqtələri xarici nöqtələrdir.



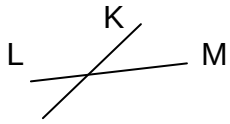

*Bucağın tərəfləri bir-birini düz xəttə tamamlayan şüalar olduqda, bu bucağa açıq bucaq deyilir.*

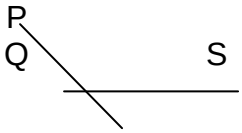



Bütün açıq bucaqlar bir-birinə bərabərdir $\angle AOB = 180°$ . Açıq bucağın yarısına düz bucaq deyilir $\angle AOB = 90°$. Düz bucaqda tərəflər bir-birinə perpendikulyardır.

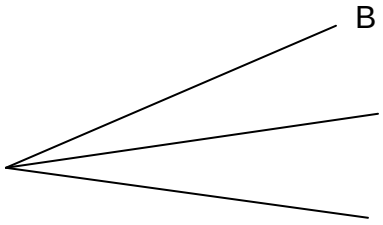



Bucaqları dərəcə ölçülərinə görə müqayisə etmək olar. Düz bucaqdan kiçik olan bucağa iti, böyük olan bucağa isə kor bucaq deyilir.




*Bucağı yarıya bölən şüaya həmin bucağın tənböləni deyilir*. Yəni bucağın tənböləni onun tərəflərindən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtələrin həndəsi yeridir.

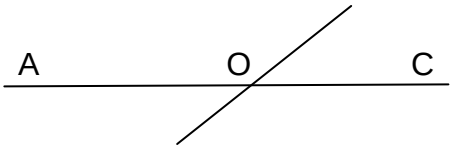



Tərifə görə ∠AOC = ∠BOC

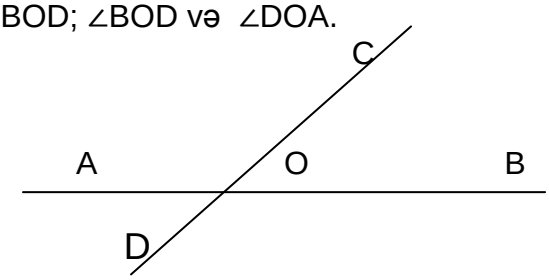
O C

A

İki bucağın bir tərəfi ortaq, digər iki tərəfi açıq bucaq əmələ gətirirsə, belə bucaqlara qonşu bucaqlar deyilir (∠AOB və ∠BOC)
Qonşu bucaqların cəmi açıq bucaq verir.




İti bucaqdan birinin tərəfləri o birinin tərəflərinin tamamlayıcı yarım düz xətləri olarsa, onlara qarşılıqlı bucaqlar deyilir. Qarşılıqlı bucaqlar bərabərdir.
Göründüyü kimi AB və CD düz xətləri kəsişdikdə iki cüt qarşılıqlı bucaq alınır ∠AOD və∠COB; ∠AOC və∠DOB. Dörd cüt qonşu bucaq alınır∠DOA və ∠AOC; ∠AOC və ∠COB; ∠COB və ∠BOD; ∠BOD və ∠DOA.



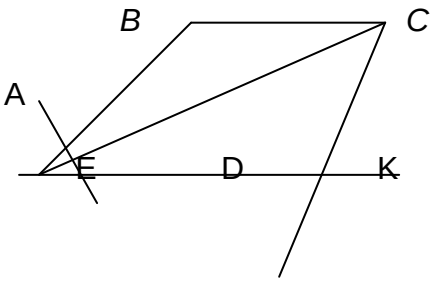
## Mövzu 15. Müstəvi fiqurlar və onların xassələri.

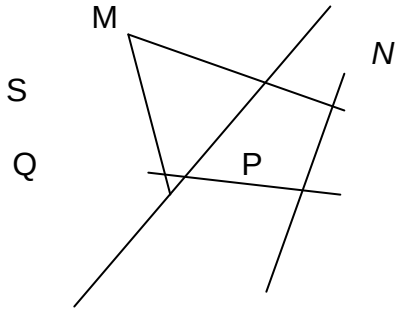
Plan

1. Qabarıq çoxbucaqlı və onun elementləri.
2. Üçbucaq, onun elementləri və növləri.
3. Paraleloqram və onun xassələri.
4. Düzbucaqlı və onun xassələri.
5. Romb və onun xassələri.
6. Kvadrat və onun xassələri.
7. Trapesiya, onun növləri və xassələri.
8. Çevrə və onun elementləri.
9. Dairə və onun hissələri.

**1. Tərif.** *Qapalı sınıq xətt və onunla məhdud olan daxili oblastın birləşməsindən alınan fiqur çoxbucaqlı adlanır.*

Qapalı sınıq xəttin təpələri çoxbucaqlının təpələri, tərəfləri isə çoxbucaqlının tərfələri adlanır. n sayda təpələri olan çoxbucaqlıya n bucaqlı deyilir. Çoxbucaqlının ixtiyari tərəfini uzatdıqda, çoxbucaqlı bu düz xəttin bir tərəfində yerləşərsə, ona qabarıq çoxbucaqlı deyilir. Başqa sözlə, qabarıq sınıq xətlə hüdudlanmış çoxbucaqlıya qabarıq çoxbucaqlı deyilir, əks halda isə qabarıq olmayan çoxbucaqlı adlanır.



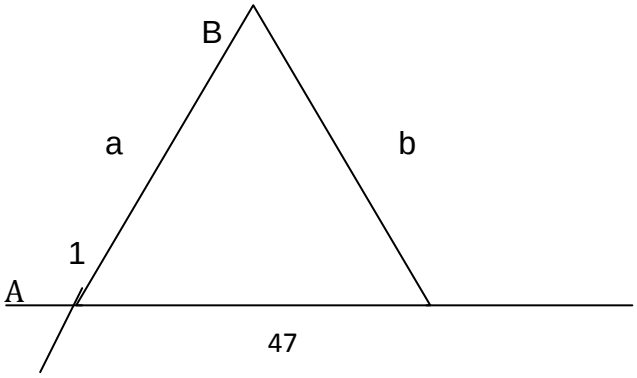




Çoxbucaqlının bir tərəfinə mənsub olan iki təpə qonşu təpələr adlanır.

Çoxbucaqlının iki qonşu olmayan təpələrini birləşdirən düz xətt parçasına çoxbucaqlının diaqonalı deyilir. Məsələn, AC. Təpələrinin və tərəflərinin sayından asılı olaraq çoxbucaqlılar siniflərə bölünürlər. Belə ki, qabarıq n bucaqlıda n=3 olduqda üçbucaq, n=4 olduqda dördbucaqlı və s. alınır.

**2. Tərif.** *Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən və həmin nöqtələri ardıcıl birləşdirən parçalardan ibarət həndəsi fiqura üçbucaq deyilir.*

Üçbucaq minimal n=3 sayda bucaqlara malik (tərəflərə) malik qabarıq n ibucaqlının ən sadə növüdür. ABC qapalı sınıq xəttini əmələ gətirən AB, BC, AC düz xətt parçaları üçbucağın tərəfləri , bu qapalı sınıq xəttin A,B,C təpələri isə üçbucağın təpələri adlanır.Üçbucaq $\Delta ABC$ kimi işarə edilir və “ABC üçbucağı” kimi oxunur. Bəzən üçbucağın tərəflərini, onun qarşısında duran bucağa uyğun, kiçik hərflərlı də işarə edirlər.



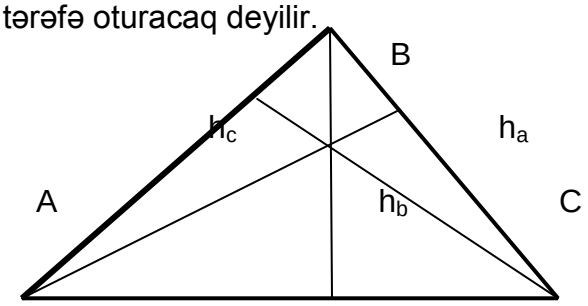
2 c

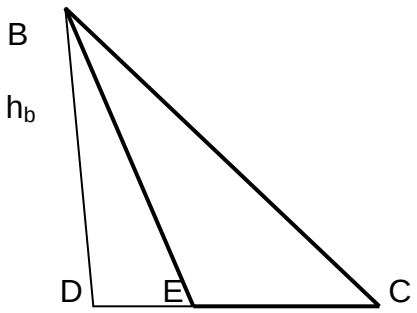
∠A, ∠B, ∠C bucaqları üçbucağın daxili bucaqları adlanır. Hər bir daxili bucağa qonşu olan bucağa uyğun xarici bucaq deyilir. Üçbucağın hər bir təpəsində daxili bucaqla qonşu olan iki xarici bucaq var. Məsələn, A bucağının qonşu bucaqları 1 və 2 bucaqlarıdır.

Bir qayda olaraq ABC üçbucağının tərəflərinin uzunluqlarını a,b,c kimi uyğun kiçik hərflərlə işarə edirlər. Onda P=a+b+c uzunluq kəmiyyəti üçbucağın perimetrini, $P = \frac{a+b+c}{2}$ isə yarımperimetrini göstərir.

İxtiyari ABC üçbucağının ∠A, ∠B, ∠C bucaqları və a, b, c tərəfləri onun əsas elementləri adlanır. Əsas elementlərdən başqa üçbucağın köməkçi elementləri hesab olunan bəzi elementləri göstərək.

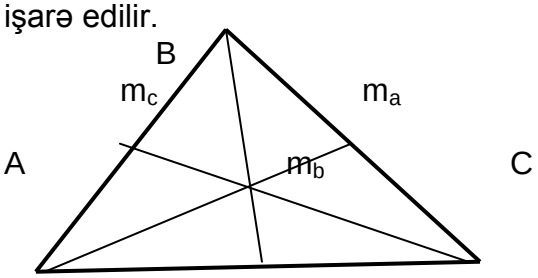
Üçbucağın hər təpəsindən çıxan və bu təpənin qarşısındakı tərəfə perpendikulyar olan düz xətt parçasına üçbucağın hündürlüyü deyilir və uyğun olaraq $h_a$, $h_b$, $h_c$ ilə işarə olunur. Üçbucağın hündürlüyü onun xaricinə də düşə bilər. Üçbucaqda hündürlük çəkilən tərəfə oturacaq deyilir.

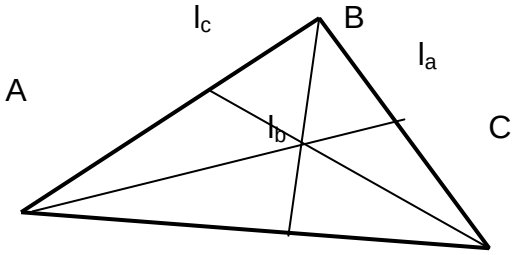



Üçbucağın hər hansı təpəsindən çıxan və bu təpə qarşısındakı tərəfin orta nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına üçbucağın medianı deyilir və uyğun olaraq $m_a$ , $m_b$ , $m_c$ ilə işarə edilir.

Üçbucağın hər hansı buçağını yarı bölən və qarşıdakı tərəfi birləşdirən düz xətt parçasına üçbucağın həmin buçağının tənböləni deyilir və uyğun olaraq $l_a$ $l_b$ , $l_c$ ilə işarə edilir.



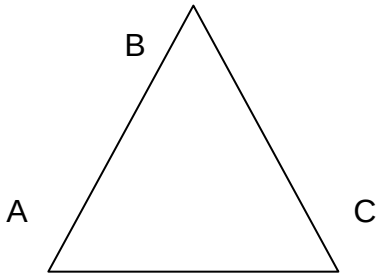




İxtiyari üçbucaqda hündürlüklər, medianlar və tənbölənlər bir nöqtədə kəsişirlər.

Bütün üçbucaqlar çoxluğu bucaqlarına görə üç sinfə bölünür.

*1) İtibucaqlı üçbucaqlar.* Bucaqlarının üçü də iti olan üçbucaqlara itibucaqlı üçbucaq deyilir. Tərifə görə

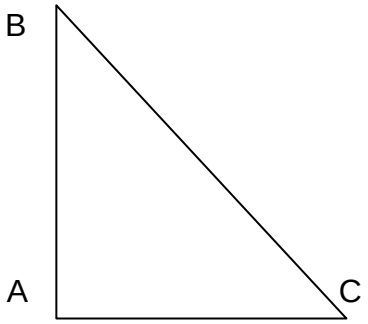
$$\begin{cases} \angle A < 90° \\ \angle B < 90° \\ \angle C < 90° \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180° \end{cases}$$



Olduqda $\Delta\, ABC$ itibucaqlı üçbucaq adlanır.

*2) Düzbucaqlı üçbucaqlar.* Bir bucağı düz olan üçbucağa düzbucaqlı üçbucaq deyilir. Düz bucağı əmələ gətirən tərəflər katetlər, digər tərəf isə hipotenuz adlanır. Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuz katetlərin hər birindən böyükdür.Tərifə görə

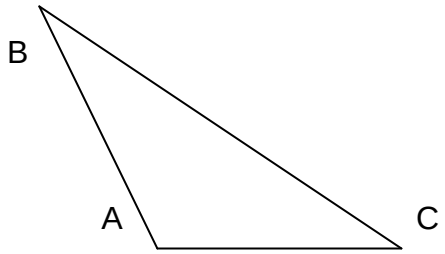
$$\begin{cases} \angle A < 90^\circ \\ \angle B < 90^\circ \\ \angle C = 90^\circ \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \end{cases}$$




Olduqda $\Delta\, ABC$ düzbucaqlı üçbucaq adlanır.

*3) Korbucaqlı üçbucaqlar.* Bucaqlarından biri düz bucaqdan böyük, açıq bucaqdan kiçik olan üçbucağa korbucaqlı üçbucaq deyilir. Tərifə görə

$$\begin{cases} \angle A < 90^\circ \\ \angle B < 90^\circ \\ \angle C > 90^\circ \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \end{cases}$$

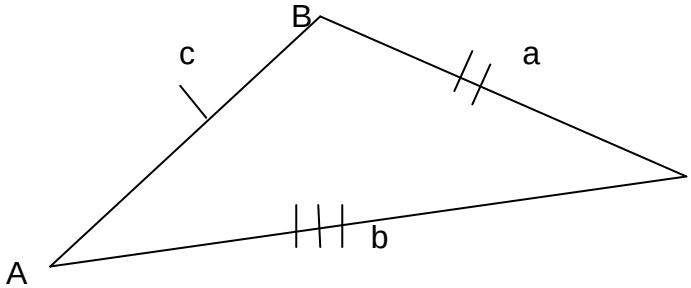



Olduqda $\Delta\, ABC$ korbucaqlı üçbucaq adlanır.

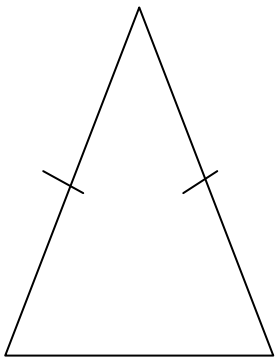
Bütün üçbucaqlar çoxluğu tərəflərinə görə də üç sinfə bölünür.

*1) Müxtəlif tərəfli üçbucaqlar.* Bütün tərəflərinin eyni uzunluq vahidində uzunluqları müxtəlif olan üçbucaqlara müxtəlif tərəfli üçbucaqlar deyilir.

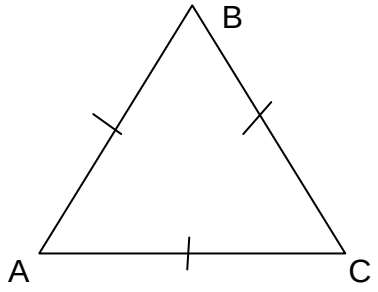
Tutaq ki, eyni uzunluq vahidi ilə ölçüldükdə ABC üçbucağının tərəfləri uyğun olaraq a,b,c müsbət ədədləri ilə ifadə olunur. Onda tərifə görə $a \neq b \neq c$.



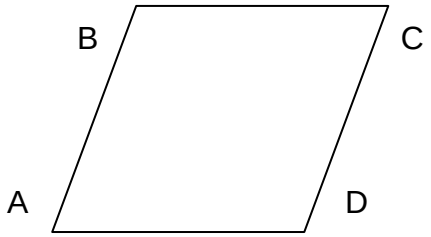

*2) Bərabəryanlı üçbucaq.* İki tərəfi bir-birinə bərabər, üçüncü tərəfi isə bu iki tərəfdən fərqli olan bərabəryanlı üçbucaq deyilir. Tərifə görə $a = b \neq c$. Bərabər tərəflərə yan tərəflər, yan tərəflər arasındakı bucağa təpə bucağı, bu təpə qarşısındakı tərəf isə üçbucağın oturacağı adlanır. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucaqları bərabərdir. Bərabəryanlı üçbucaqda təpə bucağının tənböləni üçbucağın həm medianı, həm də hündürlüyüdür.



3) *Bərabərtərəfli üçbucaqlar.* Eyni uzunluq vahidində tərəflərinin üçünün də uzunluqları bərabər olan üçbucağa bərabərtərəfli üçbucaqlar deyilir. Tərifə görə, tərəflərinin uzunluqları eyni uzunluq vahidində a,b,c ədədləri ilə ifadə olunmuşsa, onda $a = b = c$ münasibətləri doğrudur. Bərabərtərəfli üçbucağın tərəflərinin bərabərliyindən bucaqların bərbərliyi çıxır, bucaqlarının cəmi 180° olduğundan, hər bir bucaq 180° : $3 = 60°$ $olur$.



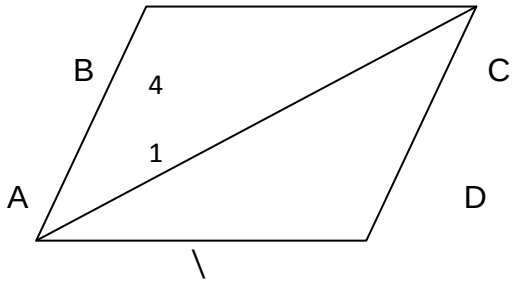

İxtiyari üçbucaq, üçbucaqlar çoxluğunun bölündüyü altsiniflərin hansına mənsub olmasından asılı olmayaraq aşağıdakı təkliflər şəklində şərh olunan xassələri ödəyir:
*1) İxtiyari üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur və tərsinə, böyük bucaq qarşısında böyük bucaq durur.*
*2) İxtiyari üçbucaqda iki tərəfin cəmi üçüncü tərəfdən böyükdür.*
*3) İxtiyari üçbucaqda iki tərəfin fərqi üçüncü tərəfdən kiçikdir.*
**3. Tərif.** *Bir düz xətt üzərində olmayan dörd nöqtədən və həmin nöqtələri ardıcıl birləşdirən parçalardan ibarət olan həndəsi fiqura dördbucaqlı deyilir.* Verilmiş nöqtələr dördbucaqlının təpələri, onları birləşdirən parçalar isə tərəfləri adlanır. Biz yalnız qabarıq dördbucaqlıları şərh edəcəyik.
Hər bir qabarıq dördbucaqlının 4 təpəsi, 4 tərəfi və 4 daxili bucaqları , 2 diaqonalı var. Qonşu olmayan iki tərəfə qarşı tərəflər deyilir, iki təpəyə isə qarşı təpələr deyilir. Qabarıq dördbucaqlının hər bir diaqonalı onu iki üçbucağa ayırdığından, qabarıq dördbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi $2 \cdot 180° = 360°$ olur. Beləliklə, ixtiyari qabarıq dördbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi $360°$.
Qabarıq dördbucaqlının mühüm növlərindən biri paraleloqramdır.
**Tərif.** *Qarşı tərəfləri cüt-cüt paralel olan dördbucaqlıya paraleloqram deyilir.*
Tərifə görə ABCD qabarıq dördbucaqlını tərəfləri $AB \parallel CD$ $v$ $BC \parallel AD$ münasibətlərini ödədikdə ABCD paraleloqramdır.



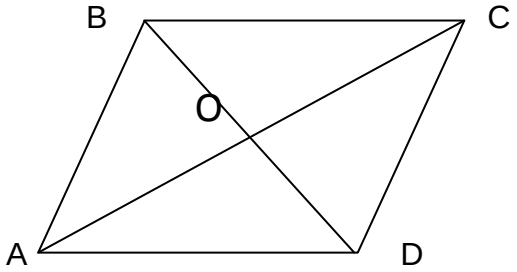

Paraleloqramı ixtiyari qabarıq dördbucaqlıdan fərqləndirən bir neçə xarakterik xassələrə baxaq.

***Xassə 1**. Paraleloqramın qarşı tərəfləri və qarşı bucaqları bərabərdir.*

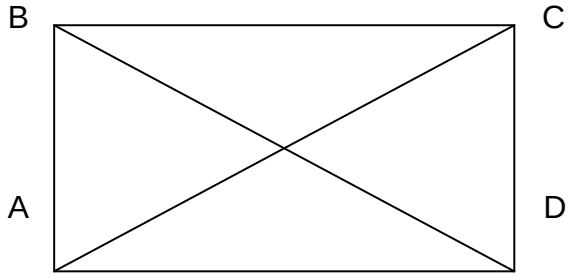
ABCD paraleloqramdır. AC diaqonalı paraleloqramı ABC və ACD üçbucaqlarına ayırır.




$BC \parallel AD$ olduğundan $v$ çarpaz bucaqlar olduğundan $\angle 1 = \angle 2$
$v$ $\angle 3 = \angle 4$ olar.
AC tərəfi isə ortaq olduğundan $\Delta ABC = \Delta CDA$ olar. Buradan AB=DC, BC=AD və $\angle B = \angle D, \angle A = \angle C$ olar.
**Xassə 2.** *Paraleloqramın diaqonalları kəsişir və kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür.*
ABCD paraleloqramını və onun diaqonallarını çəkək. AC və BD diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi O olsun. Onda $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ və BC=AD olduğu üçün $\Delta BOC = \Delta DOA$ olar. Buradan, OA=OC və OB=OD olar.

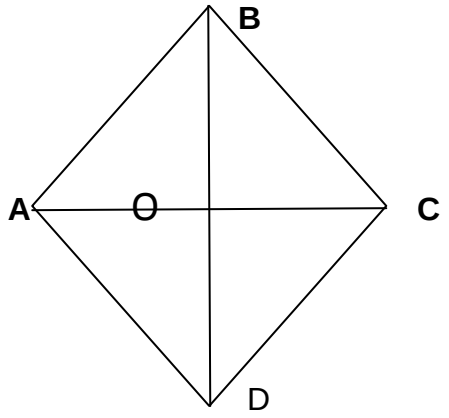



**Xassə 3.** *Paraleloqramın bir tərəfinə bitişik bucaqların cəmi 180° − $y$ bərabərdir.*
Doğrudan da, ∠A+∠B+∠C+∠D= 360° və ∠A=∠C, ∠B=∠D olduğundan 2·∠A+2·∠B =360° alırıq.
**4. Tərif.** *Bütün bucaqları düz olan paraleloqrama və ya qonşu tərəfləri perpendikulyar olan paraleloqrama düzbucaqlı deyilir.*
Tərifə görə, düzbucaqlı paraleloqram olduğundan o, paraleloqramın malik olduğu bütün xassələrə malikdir, yəni qarşı tərəflər bərabərdir və paraleldir, diaqonallar kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünürlər. Bu ümumi xassədən əlavə düzbucaqlı özünəməxsus xassələrə malikdir. Bu xassələri
göstərək.
*1) Tərifdən göründüyü kimi, düzbucaqlının bütün bucaqları d*=90°
*2) Düzbucaqlının diaqonalları bərabərdir.*
Doğrudan da, ABCD düzbucaqlısına baxaq. AC və BD onun diaqonallarıdır.




ACD və DBA düzbucaqlı üçbucaqlarının bərabərliyi aşkardır. Belə ki, DC=AB və AD ortaq tərəf olduğundan, katetlərin bərabərliyindən iki düzbucaqlı üçbucaqların hipotenuzlarının bərabərliyi alınır. Beləliklə, AC=BD doğrudur.

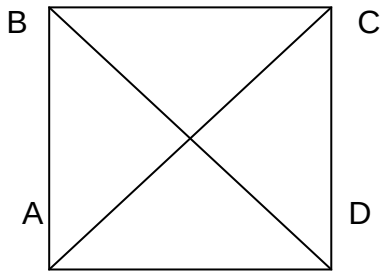
**5. Tərif.** *Bütün tərəfləri bərabər olan paraleloqrama romb deyilir.*
Romb paraleloqramın xüsusi növü olduğundan, paraleloqramın bütün xassələri romb üçün də doğrudur. Bundan əlavə rombun aşağıdakı xassəsi var: **Xassə .** *Rombun diaqonalları qarşılıqlı perpendikulyardır və onun bucaqlarının tənbölənidir.*
ABCD rombunun AC və BD diaqonallarını çəkək.



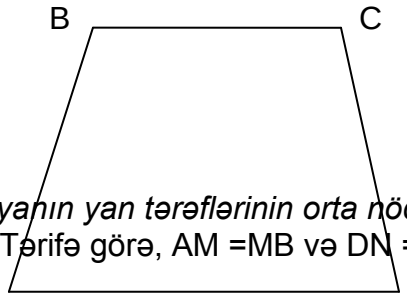

AC$\perp BD$ olduğunu göstərək. BAD bərabəryanlı üçbucaqdır və BO=OD olduğundan (paraleloqramın xassəsinə görə) AO onun medianıdır. Bərabəryanlı üçbucağın medianı həm hündürlük, həm də tənbölən olduğundan AC$\perp BD$ və $\angle 1=\angle 2$ olar. Beləliklə, AC diaqonalı A bucağını, BD diaqonalı B və D bucağını yarıya bölür.

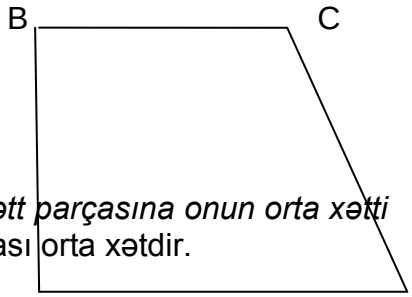
**6. Tərif.** *Bütün tərəfləri bərabər olan düzbucaqlıya kvadrat deyilir.*

Tərifdən aydındır ki, bütün tərəfləri bərabər olan düzbucaqlı və bütün bucaqları düz olan romb kvadratdır. Kvadrat eyni zamanda paraleloqram, düzbucaqlı və romb olduğundan bu fiqurların bütün xassələri kvadrat üçün də doğrudur.

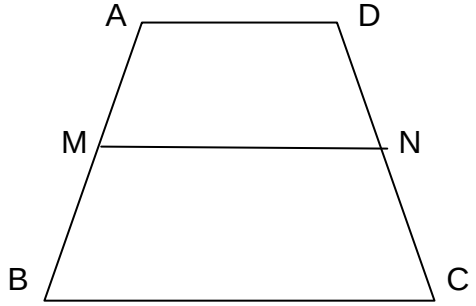



*1) Kvadratın bütün bucaqları düzbucaqdır.*
*2) Kvadratın diaqonalları bərabərdir.*
*3) Kvadratın diaqonalları qarşılıqlı perpendikulyardır.*
*4) Kvadratın hər bir diaqonalı uyğun təpə bucağının tənbölənidir.*
Göründüyü kimi, ilk iki xassə düzbucaqlıya, sonrakı iki xassə romba, bütün dörd xassənin hamısı kvadrata aiddir.
**7. Tərif.** *İki tərəfi paralel, digər iki tərəfi paralel olmayan dördbucaqlıya trapesiya deyilir.*
Trapesiyanın paralel tərəfləri, onun oturacaqları, paralel olmayan tərəfləri isə yan tərəfləri adlanır. Trapesiyanın iki qarşı təpələrini birləşdirən düz xətt parçası onun diaqonalı adlanır.
Trapesiyalar çoxluğu iki sinfə bölünür:
*1)Yan tərəfləri bərabər olan trapesiya bərabəryanlı trapesiya adlanır.* Aşkardır ki, bərabəryanlı trapesiyanın oturacaqlarına bitişik bucaqları bərabərdir.
*2)Yan tərəflərinin biri oturacağa perpendikulyar olan trapesiya düzbucaqlı trapesiya adlanır.* Göründüyü kimi, belə trapesiyanın iki bucağı düz, digər ikisi isə iti və kor bucaqdır.



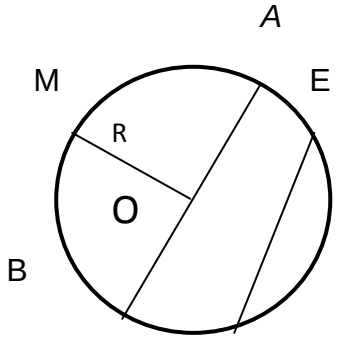




*Trapesiyanın yan tərəflərinin orta nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun orta xətti deyilir*. Tərifə görə, AM =MB və DN = NC olduqda, MN parçası orta xətdir.

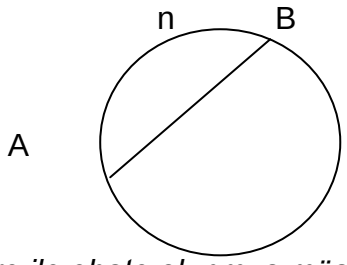



Trapesiyanın orta xəttinin xassəsi adlanan xassədən praktik məsələlərdə geniş istifadə edilir. Bu xassəni aşağıdakı təklif şəklində şərh edək.
Trapesiyanın orta xətti hər iki oturaçağa paralel olub, onların uzunluqları cəminin yarısına bərabərdir, yəni AM =MB və DN = NC olduqda,
ABCD verilmiş trapesiyadır, MN isə onun orta xəttidir.
MN ‖ BC, MN ‖ AD, MN $=\frac{1}{2}$ (BC+AD) olar.

**8.Tərif.** *Müstəvinin verilmiş nöqtəsindən verilmiş məsafədə olan bütün nöqtələr çoxluğundan ibarət həndəsi fiqura çevrə deyilir.*

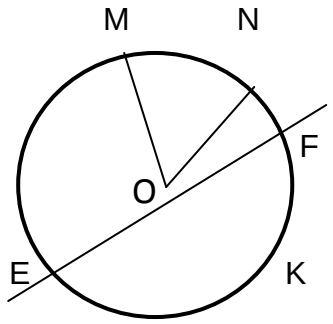



Verilmiş O nöqtəsi çevrənin mərkəzi adlanır. Çevrəyə mənsub olan ixtiyari M nöqtəsindən mərkəzə qədər olan məsafə çevrənin radiusu adlanır. Radius R hərfi ilə işarə edilir. Çevrənin iki nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına vətər deyilir. Məsələn, EF vətərdir. Mərkəzdən keçən vətərə diametr deyilir. Məsələn, AB diametrdir. Aşkardır ki, diametrin uzunluğu radiusun uzunluğunun iki mislinə bərabərdir, yəni AB = 2OM və ya AB= 2R. Çevrənin mərkəzi hər bir diametrin orta nöqtəsidir.
Çevrə hissəsinə qövs deyilir, məsələn AnB və və AmB qövsləri. Bu qövslər AB vətərinə söykənir.




**9. Tərif**. *Çevrə ilə əhatə olunmuş müstəvi hissəsinə dairə deyilir.*

Bu çevrənin mərkəzi dairənin mərkəzi, radiusu uyğun dairənin də radiusu, diametri isə dairənin diametri adlanır. Çevrənin özü isə dairənin sərhədi və ya bir qayda olaraq dairənin çevrəsi adlanır. Bu tərifdən asanlıqla görünür ki, çevrə kimi dairə də müəyyən xassələri ödəyən nöqtələr çoxluğudur. Beləliklə, dairəyə yuxarıdakı tərifə eynigüclü olan aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

**Tərif.** *Müstəvinin verilmiş nöqtəsindən məsafələri verilmiş məsafədən böyük olmayan nöqtələr çoxluğundan ibarət fiqura dairə deyilir.*

Dairənin iki radiusu arasında qalan hissəsinə dairə sektoru deyilir. Dairə çevrəsinin kəsəninin dairədən ayırdığı hissəyə dairə seqmenti deyilir. Məsələn, MON dairə sektoru, EKF isə dairə seqmentidir.