AZƏRBAYCAN RESPUBLIKASI TƏHSIL NAZIRLIYI
SUMQAYIT DÖVLƏT UNİVERSİTETİNİN NƏZDİNDƏ
SUMQAYIT DÖVLƏT TEXNİKİ KOLLECİ

"Riyaziyyat"

fənnindən mühazirələr

Orta Ixtisas Təhsil müəssisələrində
fənnin tədrisi üçün nəzərdə tutulub

SUMQAYIT-2020

Funksiyanın kəsilməzliyi

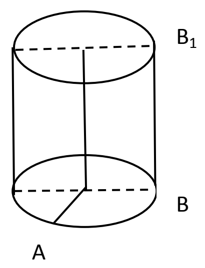
Əsas anlayışlardan biri də funksiyanın kəsilməzliyi anlayışıdır. Tərif: tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $(a;b)$ aralığında təyin olunmuşdur və $x_0 \epsilon (a;b)$. əgər $\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ olarsa bu funksiyaya $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir. Tərifə görə x_0 nöqtəsində kəsilməz olan $y=f(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

1.$y=f(x)$ funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində təyin olunmalıdır.2. $x=x_0$ nöqtəsində onun sonlu limiti olmalıdır.3.$y=f(x)$ funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsindəki $f(x_0)$ qiyməti onun bu nöqtədəki limitinə bərabər olmalıdır. $(a;b)$ aralığının bütün nöqtələrində kəsilməz olan funksiyaya bu aralıqda kəsilməz funksiya deyilir. Eyni qayda ilə $[a;b]$ parçasında da funksiyanın kəsilməzliyinin tərifi verilir. $x=a$ nöqtəsində $f(x)$-in kəsilməzliyi $\lim_{x \to a+0} f(x)=f(a)$ kimi,$x=b$ nöqtəsində isə $\lim_{x \to b-0} f(x)=f(b)$ kimi başa düşülür. Indiyə kimi öyrəndiyimiz $y=x^n$ $(n Є N)$,$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=a^x$ $(a›0,a\neq 1)$ funksiyaları bütün həqiqi oxda kəsilməzdilər, $y=tgx$,$y=ctgx$,$y=\log_a x$ funksiyaları isə özlərinin təbii təyin oblastlarında kəsilməzdirlər. Bəzi hallarda funksiyanın kəsilməzliyini sağ və sol limitləri vasitəsilə təyin etmək mümkün olur. Əgər $f(x_0+0)=\lim_{x \to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ olarsa $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində sağdan kəsilməz funksiya adlanır.$f(x_0-0)\lim_{x \to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ olarsa $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində soldan kəsilməz funksiya adlanır. Tərif: $f(x)$ funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$, $x_0 \epsilon D(f)$ şərtini ödəyərsə o x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiyadır. Tərif:$y=f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti yoxdursa və ya varsa,lakin $f(x_0)$-a bərabər deyilsə,bu funksiya x_0 nöqtəsində kəsiləndir və onda x_0 onun kəsilmə nöqtəsi adlanır. Qeyd edək ki, x_0 nöqtəsi kəsilmə nöqtəsi isə,bu nöqtədə funksiyanın sol və sağ limitləri ola bilər,lakin bu limitlər,ümumiyyətlə bərabər olmaya da bilər. Tərif: əgər x_0 nöqtəsində $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ limitləri varsa,lakin $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ isə $f(x_0-0)-f(x_0+0)$ fərqinə $y=f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində sıçrayışı deyilir.

Kəsilməz funksiyaların xassələrini ifadə edən teoremlər aşağıdakılardır. Teorem 1.x_0 nöqtəsində kəsilməz olan sonlu sayda funksiyaların cəmi də bu nöqtədə kəsilməzdir. Teorem 2.x_0 nöqtəsində kəsilməz olan sonlu sayda funksiyaların hasili də bu nöqtədə kəsilməzdir. Teorem 3.x_0 nöqtəsində kəsilməz olan iki funksiyanın nisbəti,məxrəcdəki funksiya x_0 nöqtəsində sıfırdan fərqli olduqda,bu nöqtədə kəsilməzdir.

Silindir

Fırlanma oxuna paralel olan düz xəttin onun ətrafında fırlanmasından alınan səthə sonsuz silindrik səth deyilir. Sonsuz silindrik səthlə onun daxili oblastının birləşməsinə sonsuz silindir deyilir. Sonsuz silindirin paralel müstəvilər arasında qalan hissəsi və müstəvilərlə kəsişməsindən alınan fiqurlardan ibarət cismə silindr,silindrik səthin hissəsinə silindrin yan səthi,paralel müstəvilərlə sonsuz silindrin kəsişmələrinə isə silindrin oturacaqları deyilir. Müstəvilər oxa perpendikulyar olduqda alınan silindrə düz dairəvi silindr deyilir. Düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan cismə silindr deyilir. Oturacaqların müstəviləri arasındakı məsafəyə silindrik hündürlüyü,oturacağın radiusuna silindrin radiusu deyilir.OO_1-hündürlük,BB_1-doğurandır(düzbucaqlının fırlanan tərəfi),OB=OA=R oturacağın radiusudur.



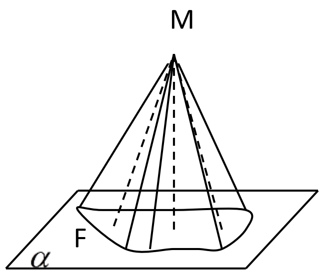
Silindrin yan səthi

Teorem.Silindrin yan səthinin sahəsi oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. Isbatı: Çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün n bucaqlının tərəflərinin sayını sonsuz artırdıqda onun perimetrinin limiti çevrənin uzunluğuna bərabərdir.

$C = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot 2R\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi R \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi R \cdot 1 = 2\pi R$. Silindrin yan səthinin tərifinə əsasən $S_{yan} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{yanprizma} = \lim\limits_{n\to\infty} H \cdot P_n = H \cdot \lim\limits_{n\to\infty} P_n = H \cdot C = 2\pi RH$ .teorem isbat olundu. Silindrin tam səthinin sahəsi onun oturacaqlarının sahələri cəmi ilə yan səthinin sahəsi cəminə bərabərdir.

$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R+H)$.

Konus



α müstəvisi üzərində F müstəvi fiquru və onun xaricində M nöqtəsi götürək. M nöqtəsi ilə F fiqurunun bütün nöqtələrini birləşdirən parçalardan ibarət fiqura konus deyilir. M nöqtəsinə konusun təpə nöqtəsi,F fiquruna konusun oturacağı,M nöqtəsindən oturacaq müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyara konusun hündürlüyü deyilir. Oturacağı çoxbucaqlı olan konus piramidadır. Yəni piramidalar konusların xüsusi halıdır. Oturacağı dairə olan konusa dairəvi konus deyilir. Hündürlüyünün oturacağı oturacağının mərkəzinə düşən dairəvi konusa düz dairəvi konus deyilir. Düzbucaqlı üçbucağın bir kateti ətrafında fırlanmasından alınan cismə konus deyilir. Düzbucaqlı üçbucağın fırlanmayan katetini saxlayan düz xəttə onun oxu,həmin katetə isə konusun hündürlüyü,fırlanan katetinə konusun radiusu,hipetonuzuna isə konusun doğuranı deyilir. Ffırlanma zamanı hipotenuzun yaratdığı fırlanma səthinə konusun yan səthi deyilir. Konusun oxundan keçən müstəvi ilə kəsişməsinə onun ox kəsiyi deyilir. Konusun ox kəsiyi yan tərəfləri doğuran,oturacağı isə oturacağın diametri olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Ox kəsiyi düzgün üçbucaq olan konusa bərabərtərəfli konus deyilir. Konusun təpəsindən keçən və onun oturacağını kəsən müstəvi ilə kəsişməsi bərabəryanlı üçbucaqdır. Bu üçbucağın yan tərəfləri konusun doğuranı,oturacağı isə vətərdir.Teorem :konusun oxuna perpendikulyar kəsiyi dairədir. Konusun oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə,alınan kəsiyin və oturacağın sahələri nisbəti onların təpədən olan məsafələrinin kvadratları nisbətinə bərabərdir.

Kəsik konus

Konusun oturacağı ilə oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi arasında qalan hissəinə kəsik konus deyilir. Konusun yan səthinin paralel müstəvi ilə oturacağı arasında qalan hissəsinəkəsik konusun yan səthi deyilir.

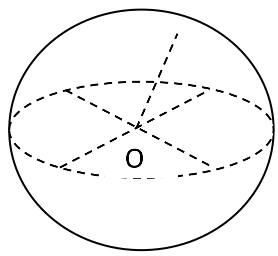
Konusun oxu kəsik konusun oxudur. Konusun hündürlüyünün və doğuranının paralel müstəvi ilə oturacaq arasında qalan hissələri kəsik konusun hündürlüyü və doğuranı adlanır.kəsik konusun ox kəsiyi,yəni oxundan keçən müstəvi ilə kəsişməsi bərabəryanlı trapesiyadır. Bu trapesiyanın oturacaqları kəsik konusun oturacaqlarının diametrləri,yan tərəfləri kəsik konusun doğuranlarıdır. Onun hündürlütyü isə kəsik konusun hündürlüyüdür.

Konusun və kəsik konusun yan səthinin sahəsi

Konus daxilinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlı piramidanın tərəflərinin sayını sonsuz artırdıqda,onun yan səthinin sahəsinin limitinə konusun yan səthinin sahəsi deyilir. Teorem. konusun yan səthinin sahəsi onun oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə doğuranı hasilinin yarısına bərabərdir. $S_{yan} = \frac{1}{2} C \cdot l = \pi R l$. Kəsik konunsun yan səthinin sahəsi oturacaq çevrələrinin uzunluqları cəminin yarısı ilə doğuranı hasilinə bərabərdir. $S_{yan} = \pi R l + \pi r l = \pi (R + r) \cdot l = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l$.

Kürə

Fəzanın verilmiş nöqtəsindən verilmiş məsafədə duran bütün nöqtələrindən ibarət fiqura sfera deyilir. Verilmiş O nöqtəsinə sferanın mərkəzi,verilmiş məsafəyə sferanın radiusu deyilir. Sferanın istənilən iki nöqtəsini birləşdirən parçaya onun vətəri,mərkəzdən keçən vətərə diametr deyilir. Sferanın mərkəzi ilə ixtiyari nöqtəsini birləşdirən parçaya da onun radiusu deyilir. Fəzanın verilmiş nöqtələrindən məsafələri verilmiş məsafədən böyük olmayan bütün nöqtələrindən ibarət çoxluğa kürə deyilir.kürəyə sfera ilə hüdudlanmış cism kimi də baxmaq olar. Kürənin sferaya aid olmayan nöqtələrinə onun daxili oblastı deyilir. Yarımçevrənin öz diametri ətrafında fırlanmasından alınan fiqura sfera,yarımdairənin öz diametri ətrafında fırlanmasından alınan cismə kürə deyilir.



Funksiyanın törəməsi

Törəmənin düsturu : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.Töräəmənin tərifinə görə alarıq ki, $k_{tox} = f'(x_0)$. Bu isə o deməkdir ki,y=f(x) funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa,onun qrafikinə (x_0;f(x_0)) nöqtəsində çəkilən və bucaq əmsalı $f'(x_0)$-a bərabər olan toxunan var. y=f(x) funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanan isə, $f'(x_0)$ törəməsi (x_0;f(x_0)) nöqtəsində y=f(x)-in qrafikinə çəkilən toxunanın bucaq əmsalı olur. Deməli törəmə həndəsi olaraq,əyriyə çəkilən toxunanın bucaq əmsalıdır.
Düzbucaqlı koordinant sistemində (x_0;y_0) nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k-ya bərabər olan düz xəttin tənliyi aşağıdakı kimidir.y-y_0=k(x-x_0).
Əgər y_0=f(x_0)və k=f$'$(x_0) olduğunu nəzərə alsaq ,alarıq ki, (x_0;f(x_0)) nöqtəsində əyriyə çəkilən toxunanın tənliyi aşağıdakı kimi olar.y=f(x_0)+f$'$(x_0)(x-x_0). Bu tənliyə absisi x_0 olan nöqtədə y=f(x) funksiyasının qrafikinə çəkilən toxunanın tənliyi deyilir.

Cəmin,hasilin,nisbətin və qüvvətin törəməsi

Tutaq ki,u(x) və v(x) funksiyaları istənilən $x \in (a;b)$ üçün diferensiallanan funksiyalardır. Onda istənilən x üçün aşağıdakılar doğrudur.

1.$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$

2.$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

3.$(cu)' = c\cdot u'(c - sabitdir)$

4.$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x)\neq 0)$

Bu qaydalar diferensiallanmanın əsas qaydaları adlanır. Istənilən n natural ədədi üçün $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$

Funksiyanın artması və azalması əlamətləri

Funksiyanın araşdırılmasında onun artma və azlma aralıqlarının tapılması mühüm yer tutur. Törəmənin köməyi ilə funksiyanın monotonluq aralıqlarının tapılması aşağıdakı teoremlə verilir.

Torem1.(a;b) aralığında diferensiallanan y=f(x) funksiyası bu aralıqda artırsa, bu aralıqdan götürülmüş istənilən x nöqtəsində $f'(x) \geq 0$ olur.
Teorem2. (a;b) intervalında diferensiallanan y=f(x) funksiyası bu aralıqda azalırsa, bu aralıqdan götürülmüş istənilən x nöqtəsində $f'(x) \leq 0$ olur.
Qeyd edək ki, y=f(x) funksiyası (a;b) aralığında artan(azalan) və x=a, x=b nöqtələrində kəsilməz funksiyadırsa, bu funksiya [a;b] parçasında artan (azalan) olur.
Bu teoremdən alınır ki, diferensiallanan funksiya artan və ya azalan olduqda, onun törəməsinin işarəsini müəyyən etmək olar. Bu 2 teorem funksiyanın artan və ya azalan olmasının zəruri şərtini ifadə edir. Indi isə funksiyanın monotonluğunun kafi şərtləri haqqında teoremləri verək.
Teorem(laqranj).y=f(x) funksiyası [a;b] parçasında kəsilməz və (a;b) aralığında diferensiallanandırsa, elə $c \in (a;b)$ nöqtəsi var ki, aşağıdakı bərabərlik doğrudur. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
Teorem.(a;b) aralığında y=f(x) funksiyasının törəməsi müsbətdirsə (mənfidirsə), bu funksiya (a;b) aralığında artandır (azalandır).
Qeyd: $f'(x) > 0, f'(x) < 0$ bərabərsizliyini həll etmək üçün ümumiləşmiş intervallar üsulundan yəni Darbu teoremindən istifadə etmək əlverişlidir:
f(x) funksiyasının törəməsinin sıfra bərabər olduğu nöqtələr və ya törəmənin olmadığı nöqtələr funksiyanın təyin oblastını bir neçə aralığa bölür ki, bu aralıqların hər birində $f'(x)$ funksiyası işarəsini dəyişmir. Hər bir aralıqda $f'(x)$ -in işarəsini sınaq nöqtəsi vasitəsi ilə aydınlaşdırmaq olar.

Funksiyanın böhran nöqtələri. Ekstremum nöqtələri

Tutaq ki, y=f(x) funksiyası [a;b] parçasında təyin olunmuş, kəsilməz funksiyadır. Məlumdur ki, y=f(x) funksiyası [a;b] parçasında kəsilməz olduqda bu parçada özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alır.Tərif. Törəməsinin sıfra bərabər olduğu və törəmənin olmadığı daxili nöqtələrə funksiyanın böhran nöqtələri deyilir. Diferensiallanan funksiyanın böhran nöqtələri haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.
Teorem(Ferma). Tutaq ki, x_0 nöqtəsi onun müəyyən ətrafında təyin olunmuş y=f(x) funksiyasının ekstremum nöqtəsidir və bu nöqtədə $f'(x_0)$ törəməsi var. Onda $f'(x_0) = 0$ olar.Ferma teoreminə görə,

ekstremum nöqtələrində diferensiallanan funksiyanın törəməsi sıfra bərabərdir. Bu teoremin tərsi doğru deyil,yəni törəmənin sıfır olduğu nöqtədə funksiyanın ekstremumu olmaya bilər. Ferma teoremi ekstremum üçün zəruri şərt adlanır. $f'(x)=0$ tənliyinin köklərinə y=f(x) funksiyasının stasionar nöqtələri deyilir. Stasionar nöqtə funksiyanın ekstremum nöqtəsi olmaya bilər.
Hər hansı funksiyanın törəməsinin sıfır olması və ya törəməsinin olmaması bu nöqtədə hökmən ekstremuma malik olması demək deyildir. Ona görə də funksiyanın ekstremuma malik olması üçün şərtlər tapmaq lazımdır. Bu şərtlər aşağıdakı teoremlərlə verilir.<u>Teorem1</u>: tutaq ki,y=f(x) funksiyası (α;β) aralığında kəsilməzdir və $x_0 \in (\alpha;\beta)$. Əgər

$(\alpha;x_0),\ (x_0;\beta)$ aralıqlarında $f'(x)$ varsa, $x \in (\alpha;x_0)$ üçün $f'(x) > 0$

və $x \in (x_0;\beta)$ üçün $f'(x) < 0$ olarsa, x_0 nöqtəsi y=f(x)-in maksimum nöqtəsidir.
<u>Teorem2</u>: tutaq ki,y=f(x) funksiyası (α;β) aralığında kəsilməzdir və $x_0 \in$

(α;β). Əgər $(\alpha;x_0),\ (x_0;\beta)$ aralıqlarında $f'(x)$ varsa, $x \in (\alpha;x_0)$ üçün

$f'(x) < 0$ və $x \in (x_0;\beta)$ üçün $f'(x) > 0$ olarsa, x_0 nöqtəsi y=f(x)-in minimum nöqtəsidir.
Bu teoremlər x_0 nöqtəsində ekstremumun varlığı üçün kafi şərtlər adlanır və onlar sadə şəkildə aşağıdakı kimi ifadə olunur. Əgər x_0 nöqtəsində törəmə işarəsini "+"-dən "-"-yə dəyişirə bu nöqtə funksiyanın maksimum nöqtəsi, "-"-dən "+"- dəyişirsə minimum nöqtəsidir.
Verilən teoremlərə və veyerştras teoreminə əsaslanaraq, verilmiş funksiyanın verilmiş parçada ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılması aşağıdakı sxem üzrə aparılır.
1)y=f(x) funksiyasının [a;b] parçasının uc nöqtələrindəki f(a) və f(b) qiymətləri tapılır.
2)funksiyanın törəməsinin (a;b) aralığında sıfır olduğu nöqtələrdə qiymətləri hesablanır.
3)funksiyanın (a;b) aralığında törəməsinin olmadığı nöqtələrdə qiymətləri tapılır.
4)funksiyanın tapılmış qiymətləri müqayisə olunur və onlardan ən böyüyü və ən kiçiyi götürülür.

Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın araşdırılması və qrafikinin qurulması

Indiyə kimi funksiyaların qrafiklərini nöqtələr vastəsilə qurulub. Lakin bele qrafik qurmaq funksiyanın qrafikinin mühüm xassələrinin itirilməsi ilə nəticələnir. Arqumentin müəyyən qiymətləri üçün funksiyanın uyğun qiymətlərini hesablamaqla qrafikini qurmaq səhvlərə gətirib çıxarır. Belə səhvlərin olmaması üçün əvvəlcə funksiya araşdırmalı,onun mühüm xassələri aşkar edildikdən sonra nöqtələr vasitəsi ilə qrafik qurula bilər. Üfüqi,şaquli və maili asimptot anlayışlarını verək.

1. Əgər $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ olarsa,y=b düz xəttinə y=f(x) funksiyasının üfüqi asimptotu deyilir. Eyni qayda ilə $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ olduqda y=b düz xətti f(x)-in üfüqi asimptotu adlanır. Həndəsi olaraq bu o deməkdir ki, x-in sonsuz böyük qiymətlərində funksiyanın qrafiki y=b düz xəttinə sonsuz yaxınlaşır.
2. Əgər $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ $(\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ olarsa,onda x=a düz xəttinə f(x) funksiyasının şaquli asimptotu deyilir.x-in qiymətləri a-ya yaxınlaşdıqca, f(x)-in uyğun qiymətləri sonsuz böyüyür.
3. Əgər $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ olarsa,y=kx+b düz xəttinə y=f(x) funksiyasının $x\to+\infty$ olduqda maili asimptotu deyilir.y=f(x) funksiyasının y=kx+b şəklində maili asimptotu varsa ,k və b əmsalları aşağıdakı düsturlarla tapılır.

   $$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ ,\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx).$$

Rasional funksiyanın sürətinin dərəcəsi məxrəcinin dərəcəsindən bir vahid böyük olarsa,onda bu funksiyanın maili asimptotu var.
Funksiyanın qrafikini qurmaq üçün aşağıdakı mərhələləri yerinə yetirmək lazımdır.
1)Funksiyanın təyin oblastını tapmalı
2)Funksiyanın tək və ya cüt olduğunu müəyyən etməli
3)Funksiyanın dövrülüyünü araşdırmalı
4)Funksiya qrafikinin kordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapmalı
5)Funksiyanın kəsilmə nöqtələrini tapmalı.
6)Funksiyanın işarəsini sabit saxladığı aralıqları müəyyən etməli. Bunun üçün 4 və 5 mərhələlərində tapılmış nöqtələri absis oxunda qeyd edib,alınan aralıqların hər birində funksiyanın işarəsini tapmalı.
7)Funksiyanın qrafikinin asimptotlarını tapmalı.

8)Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını tapmalı.
9)Funksiyanın ekstremum nöqtələrini və ekstremumlarını tapmalı
10)1-9 mərhələlərinin nəticələrini koordinat müstəvisində qeyd etməklə funksiyanın qrafikini qurmalı.

İbtidai funksiyanın tərifi. Qeyri müəyyən inteqral.

Məlumdur ki,diferensial hesabında funksiya verildikde onun törəməsini tapmaq tələb olunur. Lakin bir cox məsələlərdə törəməsinə və ya diferensialına görə funksiyanın özünü tapmaq lazım gəlir. Yəni $f(x)$ funksiyası verdildikdə elə $F(x)$ funksiyası tapmaq tələb olunur ki,

$$F(x) = f(x) \quad \text{və ya} \quad dF(x) = f(x)dx$$

olsun. Belə $F(x)$ funksiyasına $f(x)$ -in ibtidai funksiyası deyilir.Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası müəyyən araliqda verilımiş kəsilməz funksiyadır.Verilmiş aralığın bütün nöqtələrində

$$F'(x) = f(x)$$

bərabərliyini ödəyən $F(x)$ funksiyasına həmin aralıqda $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası deyilir.Teorem. Tutaq ki, $F(x)$ funksiyası verilmiş aralıqda $f(x)$ kəsilməz funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Onda, ixtiyari C sabiti üçün

1) $F(x)+C$ funksiyasıda həmin aralıqda $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.

2) Kəsilməz $f(x)$ funksiyasının verilmiş aralıqdakı istənilən ibtidai funksiyası

$$F(x)+C$$

şəklindədir.İsbatı. 1)Teoremin şərtinə görə verilmiş aralığın istənilən nöqtəsində

$$F(x) = f(x)$$

Onda hər hansı C sabiti üçün

$$(F(x)+C)' = F'(x)+(C)' = f(x)+0 = f(x)$$

alarıq. Bu isə o demekdir ki, $F(x)+C$ funksiyası da f(x)-in hər hansı ibtidai funksiyasıdır.

2) Tutaq ki, $\Phi(x)$ funksiyası verilmiş aralıqda f(x)-in hər hansı ibtidai funksiyasıdır, yəni $\Phi'(x) = f(x)$ .Onda

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ alariq.}$$

$h(x) = \Phi(x) - F(x)$ funksiyasına baxaq.

Verilmiş aralığın hər hansı x_0 nöqtəsini qeyd edək. onda Laqranj teoreminə görə aralığın istənilən x nöqtəsi üçün x ilə x_0 arasında yerləşən elə c nöqtəsi var ki,

$h(x) - h(x_0) = h'(c) \cdot (x - x_0)$ bərabərliyi doğrudur.

$h'(c) = 0$ olduğundan alırıq ki,istənilən x üçün

$h(x) - h(x_0) = 0$ və ya $h(x) = h(x_0)$

Bu isə o deməkdir ki, $h(x)$ sabit funksiyadır,yəni $h(x) \equiv C$ .Deməli,

$\Phi(x) - F(x) = C$ və ya $\Phi(x) = F(x) + C$.

Beləliklə, teorem isbat olundu.

İnteqralın xassələri

Qeyri müəyyən inteqralın aşağıdakı xassələri var.
Xassə1.Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya,diferensialı isə inteqralaltı ifadəyə bərabərdir:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Isbatı:Tutaq ki, F(x) funksiyası f(x)-in ibtidai funksiyasıdır: $F'(x) = f(x)$ .Onda $\int f(x)dx = F(x) + C$ yaza bilərik. Bu bərabərliyin hər iki tərəfindən törəmə alsaq,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$$

yəni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) .$$

Xassə2. Kəsilməz törəməsi olan F(x) funksiyasının törəməsinin qeyri-müəyyən inteqralı onun özündən sabit toplananla fərqlənir,yəni

$\int F'(x)dx = F(x) + C$ və ya $\int dF(x) = F(x) + C$

Burada F(x)-kəsilməz,diferensiallanan funksiyadır. Bu xassə,bilavasitə, qeyri-müəyyən inteqralın tərifindən alınır.Xassə3. Sıfırdan fərqli sabit vuruğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (k \neq 0)$$

Doğurdan da, $F'(x) = f(x)$ isə, $k \neq 0$ sabiti üçün

$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ olduğundan,

$\int kf(x)dx = kF(x) + C = k\int f(x)dx$ alırıq.

Xassə4. Cəmin qeyri-müəyyən inteqralı toplananların qeyri-müəyyən inteqralları cəminə bərabərdir:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Isbatı: Bu bərabərliyinin hər iki tərəfindən törəmə alaq:

$$\left(\int (f(x) + g(x))dx\right)' = (\int f(x)dx + \int g(x)dx)'$$

və ya

$$\left(\int (f(x) + g(x))dx\right)' = (\int f(x)dx)' + (\int g(x)dx)'.$$

Birinci xassəyə əsasən, $\left(\int (f(x) + g(x))dx\right)' = f(x)dx + g(x)dx$

eyniliyini alarıq. Bu isə həmin bərabərliyinin doğru olması deməkdir.

Müəyyən inteqral. Nyuton-Leybins düsturu.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməzdir. $F(x)$ isə onun hər hansı ibtidai funksiyasıdır,yəni $F'(x) = f(x)$.

$F(b) - F(a)$ fərqinə $f(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçasında müəyyən inteqralı deyilir və bu inteqral aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Onda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

olar.a-ya inteqralın aşağı sərhəddi,b-yə yuxarı sərhəddi deyilir.

(1) düsturuna Nyuton-Leybins düsturu deyilir.

Deməli, müəyyən inteqral ibtidai funksiyanın $[a;b]$ parçasındakı artımıdır.

Qeyd edək ki, bu zaman müəyyən inteqralın qiyməti ibtidai funksiyalardan hansının götürülmısindən asılı deyil.

Ibtidai funksiyalar bir birindən sabit toplananla fərqləndiklərindən, $F(x)$ ibtidai funksiyası əvəzinə $\Phi(x) = F(x) + C$ götürülərsə,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

olduğundan, axtarılan fərq C sabitindən asılı olmur.

Müəyyən inteqralın qiymətini hesablamaq üçün aşağıdakılar yerinə yetirilməlidir.

1) $f(x)$-in hər hansı ibtidai funksiyası $F(x)$ tapılır;

2) bu ibtidai funksiyanın b və a nöqtələrindəki $F(b)$ və $F(a)$ qiymətləri hesablanır;

3) $F(b)-F(a)$ fərqi tapılır.

Misal 1. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$-i tapaq.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Müəyyən inteqralın xassələri

Müəyyən inteqralın aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişənindən asılı deyil,yəni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

Xassə 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Xassə 3. Müəyyən inteqralda aşağı və yuxarı sərhədlərin yerini dəyişdikdə inteqralın işarəsi dəyişir,yəni

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Doğrudan da,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b)) - \int_b^a f(x)dx.$$

Xassə 4. İstənilən a, b və c $(a \le c \le b)$ üçün

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

Xassə 5. Istənilən $A(A \neq 0)$ ədədi üçün

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx .$$

Xassə 6. Iki funksiyanın cəminin müəyyən inteqralı onların müəyyən inteqrallarının cəminə bərabərdir:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

Xassə 7. Yuxarı sərhəddi dəyişən olan müəyyən inteqralın bu dəyişənə görə törəməsi inteqralaltı funksiyanın yuxarı sərhəddəki qiymətinə bərabərdir,yəni

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ olduğundan,

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \left(F(x)-F(a)\right)' = F'(x) = f(x) .$$

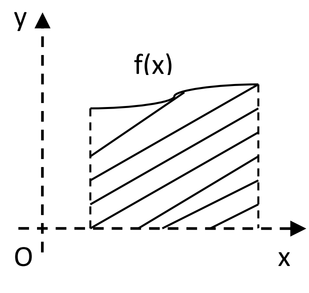
Xassə 8. $f(x)$ funksiyası tək funksiya olarsa, istənilən a üçün simmetrik parça üzrə inteqralı sıfra bərabərdir,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 .$$

Xassə 9. $f(x)$ funksiyası cüt funksiya olarsa, istənilən a üçün

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx .$

Əyrilərlə hüdudlanmış fiqurun sahəsi



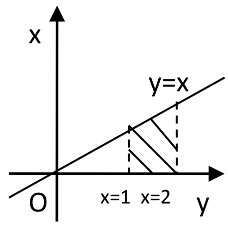
Tutaq ki, [a;b] parçasında təyin olunmuş,kəsilməz və mənfi qiymətlər almayan f(x) funksiyası verilmişdir. Yuxarıdan y=f(x) funksiyasının qrafiki,aşağıdan absis oxu,yanlardan x=a və x=b düz xəttləri ilə hüdudlanmış fiqura əyrixətli trapesiya deyilir.

Əyrixətli trapesiya $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ şərtlərini ödəyən (x;y) nöqtələri çoxluğudur. [a;b] parçasını $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ nöqtələri ilə n sayda bərabər hissəyə bölək.uzunluqları isə $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olar. Onda əyrixətli trapesiya n sayda daha kiçik əyrixətli trapesyalara bölünər. Hər bir belə kiçik əyrixətli trapesyanı düzbucaqlı kimi qəbul edərək sahəsini hesablamaq olar. Belə sahələrin cəmi əyrixətli trapesyanın sahəsinə təxminən bərabər olur.[a;b] parçasını daha kiçik hissələrə bölməklə sahəni daha dəqiq hesablamaq olar. $[x_{i-1}, x_i]$ parçasında $c_i$nöqtəsi qeyd edək. $[x_{i-1}, x_i]$ parçalarının ən böyüyünün uzunluğunu λ ilə işarə edək. Tərif. [a;b] parçasının kiçik hissələrə bölünmə qaydasından və bu hissələrdə c_i nöqtələrinin seçilməsindən asılı olmayaraq $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$ varsa,bu limitə əyrixətli trapesyanın sahəsi deyilir.

Teorem.f(x) funksiyası [a;b] parçasında kəsilməz və mənfi olmayan funksiya,F(x) isə bu parçada onun ibtidai funksiyasıdırsa,onda uyğun əyrixətli trapesyanın sahəsi ibtidai funksiyanın [a;b] parçasında artımına bərabərdir, yəni

$$S = F(b) - F(a).$$

Misal 1. y=x,y=0,x=1,x=2 xətləri ilə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapaq.



f(x)=x funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri $F(x) = \frac{x^2}{2}$ dir.

Onda $S = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$

Hadisə anlayışı

Bir çox hallarda şəraitdən asılı olaraq ya bilmədiyimiz,ya da aradan qaldıra bilmədiyimiz müxtəlif nəticələri ola bilən hadisələr olur. Məsələn,atilan güllənin hədəfə dəyəcəyini,əkilən toxumun cucərəcəyini,qepiy pulun atilarkan hansi tərəfə düşəcəyini,zəri atarkən hansi rəqəmin düşməsini əvvəldən deyə bilmərik. Bunlar həmin hadisələrə misaldır. Sınaq,təcrübə və ya müşahidənin nəticəsinə hadisə deyilir. Sınaq,təcrübə və ya müşahidənin nəticəsində baş verə bilən və ya baş verə bilməyən istənilən hadisəyə təsadüfi hadisə deyilir. Riyaziyyatın təsadüfi hadisələrin qanunauyğunluğunu öyrənən bölməsi ehtimal nəzəriyyəsi adlanır. Sınaq,təcrübə və ya müşahidə nəticəsində hökmən baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Sınaq,təcrübə və ya müşahidə nəticəsində heç zaman baş verməyən hadisəyə mümkün olmayan hadisə deyilir. Şərti olaraq hadisələr mürəkkəb və elementar hadisələrə bölünür. Sınaq,təcrübə və ya müşahidənin hər bir ayrılmayan nəticəsinə elementar hadisə deyilir. Bütün elementar hadisələr çoxluğuna isə elementar hadisələr fəzası və ya sınaq fəzası deyilir. Elementar hadisələr fəzası U ilə işarə olunur. Elementar hadisələr fəzasının hər hansı alt çoxluğuna hadisə deyilir. Bu zaman $\varnothing$ boş çoxluq mümkün olmayan hadisə,U isə yəqin hadisə olacaq. Bütün nəticələri A və ya B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan hadisəyə A və B hadisələrinin birləşməsi deyilir və $A \bigcup B$ ilə işarə olunur. Nəticələri həm A hadisəsinə,həm də B hadisəsinə daxil olan hadisəyə A və B hadisələrinin kəsişməsi deyilir və $A \bigcap B$ kimi işarə olunur. Ortaq nəticələri olmayan hadisələrə uyuşmayan hadisələr deyilir. A hadisəsinə daxil olmayan bütün nəticələr çoxluğuna A hadisəsinin əks hadisəsi deyilir və $\overline{A}$ kimi işarə olunur. əgər A hadisəsinin hər bir nəticəsi həm də B hadisəsinin nəticəsidirsə,deyilir ki, A hadisəsi B hadisəsini doğurur və ya B hadisəsi A hadisəsinin nəticəsidir və bu vaxt $A \subset B$ kimi yazılır. Nəticələri B hadisəsinə daxil olmayıb,yalnız A hadisəsinə daxil olan hadisəyə A hadisəsi ilə B hadisəsinin fərqi deyilir və A\B kimi işarə olunur.

Hadisənin ehtimalı

Tutaq ki,$U = \{E_1,...,E_n\}$ elementar hadisələr fəasının hər bir E_k elementinə onun ehtimalı adlanan və elə mənfi olmayan $P(E_k)$ ədədi qarşı qoyulur ki, $\sum_{k=1}^{n} P(E_k) = P(E_1) + ... + P(E_n) = 1$ şərti ödənir. Onda U-ya ehtimal fəzası deyilir. Ehtimal fəzası $(E_1,...,E_n; P_1,...,P_n)$ $ve\,ya$ $(U;P)$ kimi işarə olunur. Hər bir A hadisəsi elementar hadisələr fəzasının müəyyən alt çoxluğu olduğundan o, elementar hadisələr üzrə ayrılışa malikdir. Yəni müəyyən E_{k_p} elementar hadisələri üçün $A = \bigcup_p E_{k_p}$ olur. A hadisəinin P(A) ehtimalı onun elementar hadisələr üzrə ayrılışındakı elementar hadisələrin ehtimalları cəminə deyilir.

Teorem1.a)istənilən uyuşmayan $A \subset U$ ve $B \subset U$ hadisələri üçün $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b) $P(\varnothing) = 0$

c) $A \subset U, B \subset U$ ve $A \subset B$ ödəyən A və B hadisələri üçün $P(A) \leq P(B)$

ç) $A \subset U$ hadisəsi və onu əks $\overline{A}$ hadisəi üçün $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ bərabərliyi doğrudur.

d) $A \subset U$ ve $B \subset U$ hadisələri üçün $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ doğrudur.

Teorem2. Tutaq ki, U eyni imkanlı elementar hadisələr fəzasıdır. Müəyyən $B \subset U$ hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində istənilən $A \subset U$ hadisəsinin şərti ehtimalı $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ düsturu ilə tapılır.

Teorem3. tutaq ki, U elementar hadisələr fəzası cüt cüt uyuşmayan $B_1, ..., B_n$ hadisələri üzrə ayrılır. Onda istənilən A hadisəi üçün $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + ... + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$ düsturu doğrudur. Bu düstura tam ehtimal düsturu deyilir. A və B hadisələri $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ münasibətini ödəyərsə onlara asılı olmayan hadisələr deyilir.

İrrasional tənliklər

Dəyişəni həm də kök işarəsi altında olan cəbri tənliklərə irrasional tənliklər deyilir. Məs. $\sqrt{x+1} + x = 3$,

$\sqrt[3]{x-2} + x^2 = 10$ tənlikləri irrasional tənliklərdir.

Misal 1. $\sqrt{x^4 - 32} = 7$

$x^4\text{-}32 = 49$

$x^4 = 81$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

Misal 2. $\sqrt{3x+1} = 2x - 11$

$3x + 1 = 4x^2 - 44x + 121$

$4x^2 - 47x + 120 = 0$

$x_1 = 8 \qquad x_2 = 3.75$ $kök$ü $deyil.$

Misal3. $\sqrt{2x-9} = \sqrt{x-7}$

$2x - 9 = x - 7$

$x = 2$ $kök$ü $deyil.$

∇ $n = 2k+1$ olduqda $A^n(x) = B^n(x)$ $il\text{ə}$ $A(x) = B(x)$ eynigüclü olduğundan, yalnız tək dərəcədən qüvvətə-

yüksəltmə aparmaqla həll edilən irrasional tənliklərə alınan köklərin verilmiş tənliyi ödəyib ödəmədiyini yoxlamağa

ehtiyac yoxdur.

İrrasional tənliklərin iki mühüm növünü ayrıca qeyd edək.

1. $\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$ tənliyi, burada $A(x), B(x)$ rasional ifadələr, k −natural ədəddir.

Hesabi kökün tərifinə görə alırıq ki, bu halda aşağıdakı təklif doğrudur.

$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$ tənliyi

$\begin{cases} A(x) = B^{2k} \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$ sistemi ilə eynigüclüdür.

2. $\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)}$ tənliyi. Bu halda aşağıdakı təklif doğrudur:

$\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)}$ tənliyi $\begin{cases} A(x) = B(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$ (və ya $A(x) \geq 0$) sistemi eynigüclüdür.

Misal 4. $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 2x - 4$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 = (2x-4)^2 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 4 = (2x-4)^2$ tənliyinin kökləri 3 və $\frac{4}{3}$ -dür. Bu köklərdən ancaq 3 ədədi $2x - 4 \geq 0$

bərabərsizliyini ödəyir.

İrrasional bərabərsizliklərin həlli.

Məlumdur ki, $a \geq 0,\ b \geq 0$ olduqda ixtiyari müsbət n ədədi üçün $a < b$ bərabərsizliyi ilə $a^n < b^n$ bərabər-

sizliyi eynigüclüdür. Lakin $A(x) < B(x)$ $il ə$ $A^n\ (x) < B^n(x)$ eynigüclü deyil. İrrasional bərabərsizliklər də,

qüvvətəyüksəltmə əməli ilə həll edildiyindən, buradan alınır ki. belə bərabərsizlikləri həll edərkən onun hər iki tərə-

finin işarəsini nəzərə almaq lazımdır. İki nön bərabərsizliyin həll qaydasını göstərək.

1. $\sqrt[2k]{A(x)} < B(x)$ şəklində olan bərabərsizlik.

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^{2k}(x) \end{cases} \qquad (1)$$ bərabərsizliklər sistemi ilə

eynigüclüdür. Doğrudan da, cüt dərəcəli kökün

mənası olması üçün $A(x) \geq 0,$ hesabi kök mənfi olmadığı üçün $B(x) > 0$

olmalıdır. $a < b$ $v ə$ $a^n < b^n$ bərabərsizlikləri eynigüclü olduğundan, $A(x) < B^{2k}(x)$ və $\sqrt[2k]{A(x)} < B(x)$

bərabərsizlikləri eynigüclüdür.

Misal 1. $\sqrt{x^2 - x - 2} < 1 - x$ bərabərsizliyini həll edək.

(1) bərabərsizliklər sisteminə əsasən, verilmiş bərabərsizliyin həllini

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 < (1 - x)^2 \end{cases} \qquad v ə\, ya \qquad \begin{cases} (x+1)(x-2) \geq 0 \\ x < 1 \\ x < 3 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sisteminin həllinə gətirmək olar.

Bu sistemin birinci bərabərsizliyin həllər çoxluğu $(-\infty; -1]\ \cup\ [2; +\infty)$ ikinci və üçüncü bərabərsizliklərinin həlləri isə, uyğun olaraq, $(-\infty;1)$ və $(-\infty;3)$ aralıqlarıdır. Bərabərsizliklər sisteminin həlli bu çoxluqların ortaq

hissəsi olduğundan, $x \in \ (-\infty;-1]$ alarıq.

2. $\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$ bərabərsizliyi $B(x) \geq 0, A(x) > B^{2k}(x)$ və ya $A(x) \geq 0, B(x) < 0$ olduqda doğrudur.

Ona görə də $\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$ bərabərsizliyini həll etmək üçün

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^{2k}(x) \end{cases} \quad \text{və} \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

bərabsizliklər sistemini həll edib, onların həllər çoxluğun birləşdirmək lazımdır.

Üstlü tənliklər sistemi.

Üstlü tənliklər sisteminin həlli misallarla izah edək

Misal 1. $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 5^{x+3y} = \frac{1}{5} \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edək. Sistemə daxil olan tənliklərin hər birində üstləri bərabərləş-

dirməklə x $və$ y −ə nəzərən: $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ xətti tənliklər sistemini alarıq. Bu sistemin həlli $(2;-1)$ cütüdür.

Misal 2. $\begin{cases} 2^x + 3^{y-1} = 11 \\ 4^x - 7 \cdot 3^y = 1 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edək. $2^x = t$ və $3^y = z$ əvəz edək. Onda t $və$ $z -$ ə

nəzərən: $\begin{cases} t + \frac{z}{3} = 11 \\ t^2 - 7z = 1 \end{cases}$ sistemi alınar.

Sistemin birinci tənliyindən $z = 33 - 3t$ şəklində tapıb ikinci tənlikdə yazsaq $t^2 + 21t - 232 = 0$ tənliyini ala-rıq. Buradan $t_1 = 8$ $t_2 = -29$. Əvəzləmədə yerinə yazmaqla $z_1 = 9$, $z_2 = 120$ alarıq. $2^x = 8$ və $3^y = 9$

tənliklərindən $x = 3,\ y = 2$. $2^x = -29$ $və$ $3^y = 120$ tənliklərindən birincisinin həlli olmadığı üçün bu halda

sistemin həlli yoxdur. Beləliklə, sistemin həlli $(3; 2)$ cütüdür.

Loqarifmik tənliklər sistemi.

Loqarifmik tənliklər sisteminin həlli,prinsipcə, digər tənliklər sisteminin həllindən fərqli deyil. Burada, adətən,

tənliklər sisteminin həllində istifadə etdiyimiz üsullardan və loqarifmik funksiyanın məlum xassələrindən istifadə olunur.

Misal 1. $\begin{cases} x - y = 6 \\ \log_2 x + log_2 y = 4 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edək. Aydındır ki, $x > 0, y > 0$ olmalıdır. Sistemin birinci tənliyindən $x = 6 + y$, ikinci tənliyindən isə $xy = 16$ alarıq və beləliklə $\begin{cases} x = 6 + y \\ xy = 16 \end{cases}$ sistemini alarıq.

$x = 6 + y$

əvəzləməsini ikinci tənlikdə yerinə yazmaqla $y^2 + 6y - 16 = 0$ kvadrat tənliyini alarıq. Onun kökləri $y_1 = 2$,

$y_2 = -8$ ədədləridir. Onda $x_1 = 8,\ x_2 = -2$. Lakin $x = -2, y = -8$ verilmiş sistemin həlli ola bilməz. $(8; 2)$

cütü sistemin yeganə həllidir.

Misal 2. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edək. Tənliklər

sisteminin ikinci tənliyindən $x - y = \left(\sqrt{3}\right)^2$,

yəni$x - y = 3$ alarıq. Buradan $x = y + 3$ əvəzləməsi aparmaqla sistemin birinci tənliyini $3^{y+3} \cdot 2^y = 972$ və

$3^y \cdot 2^y = 36$ şəklinə gətirmək olar. Onu da $6^y = 6^2$ şəklində yazıb alarıq ki, $y = 2$. Onda $x = 5$. Beləliklə, $(5; 2)$ cütü verilmiş sistemin həllidir.

Triqonometrik tənliklər sistemi

İndi isə bəzi triqonometrik tənliklər sisteminin həlli üsulları ilə tanış olaq.

Misal 1. $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ cosx + cosy = 1 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edək. $x = \frac{\pi}{2} + y$ əvəzləməsi etməklə ikinci tənliyi,

$cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + cosy = 1$ şəklinə salmaq olar. Əgər bu tənliyə çevirmə düsturunu tətbiq etsək, onda

$-siny + cosy = 1$ alarıq. Köməkçi bucaq daxil etməklə bu tənliyi həll etmək mümkündür. Tənliyin hər iki tərəfi-

ni $\sqrt{2}$ -yə bölək və onun $cos\frac{\pi}{4} \cdot cosy - sin\frac{\pi}{4} siny = \frac{\sqrt{2}}{2}$ və ya $cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şəklinə salaq.Bu tənliyin həl-

li $y = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ və ya $y_1 = 2\pi n,$ $y_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$ y-in bu qiymətlərini əvəzləmədə nəzərə alsaq

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x_2 = 2\pi n, n \in z$ olar. Beləliklə tənliklər sisteminin həlli $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n)$ və $(2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$,n$\in z$

Misal 2. $\begin{cases} cos(x + y) = 0 \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edək. Tənliklər sisteminin birinci tənliyinin həlli

$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$ ikinci tənliyinin həlli isə $x - y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z$ şəklindədir. Yəni verilmiş tənliklər siste-

minin həlləri $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x - y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$ tənliklər sistemini ödəyir.Buradan isə tərəf-tərəfə toplamaq və tərəf-tərəfə çıxmaqla alarıq ki, bu hәllәr $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(n + k)$, $y = \frac{\pi(n-k)}{2}$, $(n, k \in z)$ şәklindәdir. Bu hәllәri daha sadә şәkildә göstәrmә

olar. $n \in z$ vә $k \in z$ olduğundan, $n + k \in z$, $n - k \in z$ olar.

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi m}{2}$, $y = \frac{\pi l}{2}$, $l, m \in z$. Belәliklә, verilmiş sistemin hәllәri $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi m}{2}; \frac{\pi l}{2}\right)$ $(m, l \in z)$ cütü şәklindәdir.