AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

SUMQAYIT DÖVLƏT UNİVERSİTETİNİN NƏZDİNDƏ

SUMQAYIT DÖVLƏT TEXNİKİ KOLLECİ

Riyaziyyat

fənnindən mühazirələr

Orta ixtisas Təhsil müəssisələrində fənnin tədrisi üçün nəzərdə tutulub

SUMQAYIT-2020

Mövzuların adları

1. Funksiyanın tərifi,onun təyin oblastı, qiymətlər çoxluğu və qrafiki. Funksiyanın verilmə üsulları.
2. Funksiyaların xassələri. Cüt və tək funksiyalar. Hissə-hissə verilmiş funksiya. $y=x^n$ qüvvət funksiyaları.
3. Qrafiklərin çevrilməsi. Funksiyalar üzərində əməllər.
4. Mürəkkəb funksiya. Tərs funksiya.
5. Fəzada nöqtə, düz xətt və müstəvi. Fəzada düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti. Düz xətt və müstəvilərin paralelliyi. Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı. Düz xətt və müstəvi arasındakı bucaq.
6. Üç perpendikulyar teoremi. İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar. Perpendikulyar müstəvilər. Paralel müstəvilər.
7. Dönmə bucaqları. Bucağın radian və dərəcə ölçüsü. Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi. Xətti sürət. Bucaq sürəti.
8. Triqonometrik funksiyalar. Vahid çevrə və istənilən bucağın triqonometrik funksiyaları.
9. Çevirmə düsturları. Triqonometrik eyniliklər.
10. Toplama düsturları. Toplama düsturlarından alınan nəticələr. Triqonometrik ifadələrin sadələşdirilməsi.
11. Sinuslar teoremi. Sinuslar teoremi və üçbucağın sahəsi. Kosinuslar teoremi.
12. Dövri funksiyalar. $y=sinx$ və $y=cosx$ funksiyalarının qrafiki.
13. $y=sinx$ və $y=cosx$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri. $y=a\ sin\ bx$ və $y=\ a\ cos\ bx$ funksiyasının dövrü və amplitudu.
14. Triqonometrik funksiyalar və periodik hadisələr.
15. $y=tgx$ və $y=ctgx$ funksiyaları və qrafikləri.
16. Tərs triqonometrik funksiyalar.
17. Çoxüzlülər, prizmalar. Çoxüzlülər və onların müxtəlif tərəfdən görünüşləri. Prizmanın səthinin sahəsi. Prizmanın müstəvi kəsikləri.
18. Piramida. Piramidanın yan və tam səthinin sahəsi. Piramidanın kəsikləri. Kəsik piramida.
19. Sadə triqonometrik tənliklərin həlli.
20. Triqonometrik tənliklərin həll üsulları.
21. Prizmanın həcmi.
22. Piramidanın həcmi.
23. Fəza fiqurlarının oxşarlığı. Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmləri. Kəsik piramidanın həcmi.
24. Fəzada simmetriya.
25. İrrasional üstlü qüvvət. Üstlü funksiya. *e* ədədi. Üstlü funksiyanın qrafikinin çevrilmələri.
26. Ədədin loqarifmi. Loqarifmik funksiyalar. Loqarifmin xassələri.
27. Üstlü tənliklər. Loqarifmik tənliklər. Üstlü və loqarifmik bərabərsizliklər.
28. Kompleks ədədlər. Kompleks ədədlər üzərində əməllər. Kompleks ədədin həndəsi təsviri. Kompleks ədədin modulu və arqumenti. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli. Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər. Kompleks ədədin *n*-ci dərəcədən kökü.
29. Külliyat və seçim. Təsadüfi seçim və növləri. Məlumatın təqdimi. Binomial açılışlar.
30. Binomial sınaqlar. Bernulli sınaqları.

Mövzu 1
Funksiyanın tərifi, onun təyin oblastı, qiymətlər çoxluğu və qrafiki. Funksiyanın verilmə üsulları.

Ətraf aləmdə baş verən müxtəlif proseslərdə kəmiyyətlərin bəziləri digərlərindən asılı olaraq dəyişir və birinin qiyməti digərinin qiymətini müəyyən edir.

Məsələn, piyadanın getdiyi yolun uzunluğu zamandan asılı olaraq dəyişir, ərzağa ödənilən pul onun kütləsindən asılı olaraq dəyişir. Yol və zaman, kütlə və dəyər dəyişən kəmiyyətlərdir. Bu kəmiyyətlərdən biri sərbəst, digəri isə ondan asılı olaraq dəyişir. Məsələn, zaman sərbəst dəyişən, gedilən yol isə zamandan asılı dəyişən kəmiyyətdir, ərzağın kütləsi sərbəst, onun dəyəri isə asılı dəyişən kəmiyyətdir. Aydındır ki, dəyişən kəmiyyətlərin hər biri müəyyən çoxluqdan qiymətlər alır.

X çoxluğunun hər bir x elementinə Y çoxluğunun müəyyən bir y elementini qarşı qoyan qaydaya X coxluğunda təyin olunmuş funksiya deyilir.

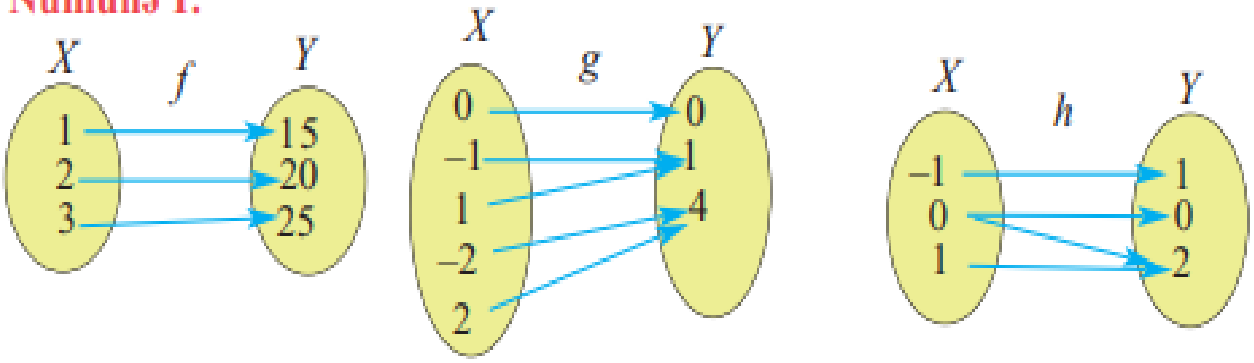
Burada x sərbəst dəyişən və ya arqument, y isə asılı dəyişən və ya funksiya adlanır. Funksiyanı adətən f (və ya g, φ və s.) ilə, arqumentin verilmiş qiymətinə uyğun qiymətini isə $f(x)$ (və ya $g(x)$, $\varphi(x)$ və s.) ilə işarə edirlər: $y = f(x)$

Arqumentin ala bildiyi qiymətlər çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı deyilir. Arqumentin bu qiymətlərinə uyğun asılı dəyişənin aldığı qiymətlər funksiyanın qiymətlər çoxluğunu əmələ gətirir. f funksiyasının təyin oblastı adətən $D(f)$ ilə, qiymətlər çoxluğu isə $E(f)$ ilə işarə edilir.

Funksiya müxtəlif üsullarla verilə bilər: cədvəllə, uyğun qiymətlər cütləri ilə, asılılıq xəritəsi ilə, qrafiklə, düsturla və s.

Təyin oblastı sonlu çoxluqdursa, arqumentin hər bir qiymətinə asılı dəyişənin uyğun qiymətini qarşıqoyma qaydası oxlarla göstərilə bilər. Belə təsvir **asılılıq xəritəsi** adlandırılır.

Nümunə 1.



Burada f və g uyğunluqlarının hər biri funksiyadır, çünki X çoxluğundan götürülmüş hər bir ədədə Y çoxluğundan yeganə ədəd qarşı qoyulur.
h uyğunluğu isə funksiya deyil (niyə?).
Qarşıqoyma qaydasına görə yaza bilərik: $f(1) = 15$, $f(2) = 20$, $f(3) = 25$
$g(0) = 0$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 1$, $g(-2) = 4$, $g(2) = 4$
Göstərilən funksiyaları arqumentin və funksiyanın **uyğun qiymətləri cütlərini sadalamaqla** da vermək mümkündür. f funksiyası: $\{(1; 15), (2; 20), (3; 25)\}$
g funksiyası: $\{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4), (2; 4)\}$

Funksiya cədvəllə verilə bilər. Cədvəlin bir sətrində (və ya sütununda) sərbəst dəyişənin, digər sətrində (və ya sütununda) isə asılı dəyişənin qiymətləri göstərilir.

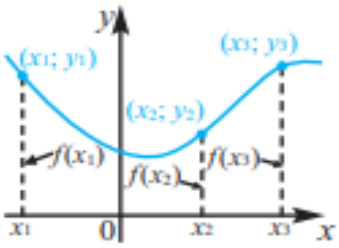
Sərbəst dəyişənin $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ müxtəlif qiymətlərinə uyğun asılı dəyişənin $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ qiymətləri cədvəl vasitəsilə verilərsə, buna funksiyanın cədvəl üsulu ilə verilməsi deyilir.

Funksiya düsturla - analitik üsulla verilə bilər.

Sərbəst dəyişənlə asılı dəyişən arasındakı uyğunluq müəyyən düsturla verilərsə, deyilir ki, funksiya analitik üsulla verilib. $y = kx + b$ xətti funksiyası, $y = kx$ düz mütənasiblik funksiyası, $y = \frac{k}{x}$ tərs mütənasiblik funksiyası, $y = ax^2 + bx + c$ kvadratik funksiyası və s. analitik üsulla verilmiş funksiyalardır.

Arqumentin hər bir $x \in D$ qiyməti üçün funksiyanın uyğun $y = f(x)$ qiymətini hesablayıb, koordinatları $(x; y)$ olan nöqtəni koordinat müstəvisində qurmaq olar. Bütün belə nöqtələr çoxluğu funksiyanın qrafikini əmələ gətirir.

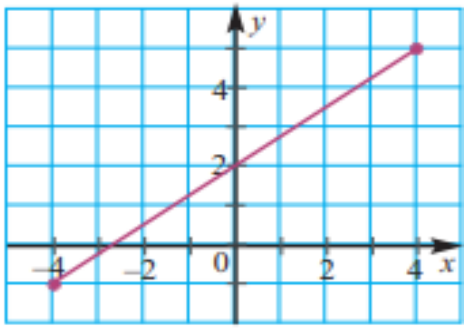
Funksiyanın qrafiki koordinat müstəvisində absisi arqumentin, ordinatı isə funksiyanın uyğun qiyməti olan bütün nöqtələr çoxluğudur.



Funksiya qrafiklə verilə bilər. İki dəyişən kəmiyyət arasındakı asılılığı koordinat müstəvisində həndəsi olaraq təsvir etmək əlverişlidir.

Nümunə 4. Şəkildə $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ xətti funksiyası $-4 \le x \le 4$ aralığında qrafiklə verilmişdir.

Uc nöqtələrinin koordinatları $(-4; f(-4))$, yəni $(-4; -1)$ və $(4; f(4))$, yəni $(4; 5)$ olan parça bu funksiyanın verilən aralıqdakı qrafikidir. Uc nöqtələri qrafikə aiddir. Şəkildə bu nöqtələr rəngli dairəciklərlə qeyd olunmuşdur.



Qiymətlər çoxluğu: $[-1; 5]$.

Qeyd: Əgər funksiyanın qrafiki olan əyrinin (və ya düz xətt parçasının) ucları xüsusi dairəciklə qeyd edilməyibsə, deməli, qrafiki sonsuz davam etdirmək olar (adətən, bu uclardakı oxlarla göstərilir).

İki kəmiyyət arasındakı asılılığın funksiya olub-olmadığını onları ifadə edən nizamlı cütlərə – nöqtələr çoxluğunun koordinatlarına görə və ya verilən qrafik təsvirə görə müəyyən etmək olar.

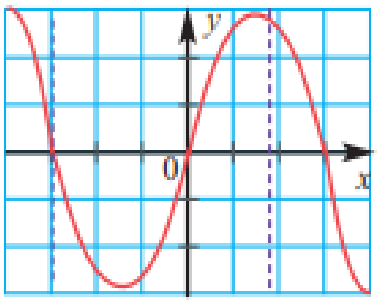
1. Nöqtələrin koordinatlarına görə. Arqumentin qiymətləri arasında (cütün birinci qiyməti) təkrarlanan qiymətlər varsa, bu asılılıq funksiya deyildir.

{(1; A), (1; B), (2; C), (3; D)} nöqtələr çoxluğu ilə verilmiş asılılıq funksiya deyil.

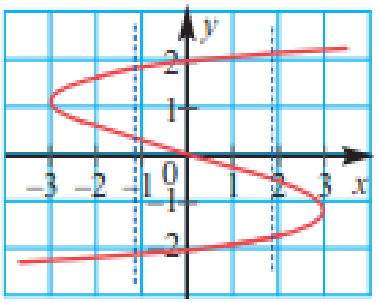
{(1; A), (2; B), (3; C), (4; C), (5; D)} asılılığı funksiyadır.

2. Qrafik təsvirə görə. Ordinat oxuna paralel çəkilmiş istənilən şaquli düz xətt qrafiki ən çoxu bir nöqtədə kəsərsə, bu asılılıq funksiyadır (şəkil a).

a)



b)



Ordinat oxuna paralel çəkilən və qrafiki iki (və ya daha çox) nöqtədə kəsən düz xətt varsa (şəkil b), bu asılılıq funksiya deyil. Bu onu göstərir ki, arqumentin (x-in) eyni qiymətinə funksiyanın bir neçə qiyməti uyğundur. Bu isə funksiyanın tərifinə ziddir.

Analitik üsulla verilmiş funksiyanın təyin oblastı göstərilməyibsə, təyin oblastı olaraq arqumentin bütün elə qiymətləri nəzərdə tutulur ki, bu qiymətlərdə funksiyanı ifadə edən düsturun mənası olsun (arqumentin bu qiymətlərini bəzən funksiyanın təbii təyin oblastı adlandırırlar). Bu halda arqumentin hansı qiymətləri ala bilmədiyini araşdırmaq lazım gəlir.

Bəzi funksiyaların cəbri yazılışına görə onun təyin oblastını müəyyən edək.

1. Funksiya sərbəst dəyişənə görə **çoxhədli şəklində** verilibsə, onun təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Məsələn, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ funksiyasının təyin oblastı $(-\infty; +\infty)$ çoxluğudur.

2. Rasional funksiyaların məxrəcindəki ifadənin qiyməti sıfra bərabər ola bilməz. Məsələn, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ rasional funksiyasında arqumentin $x^2 - 4 = 0$ şərtini ödəyən qiymətləri onun təyin oblastına daxil ola bilməz.

Bu qiymətlər $x = -2$ və $x = 2$-dir. $g(x)$ funksiyası

$(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ çoxluğunda təyin olunmuşdur.

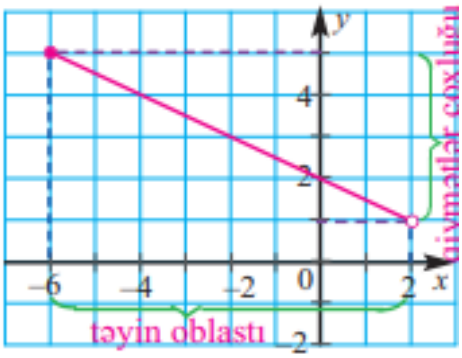
3. Kvadrat kök daxil olan funksiyalarda kökaltı ifadə mənfi qiymət ala bilməz. Bu halı iki nümunə üzərində nəzərdən keçirək.

1) $y = \sqrt{2x-6}$ funksiyasının təyin oblastı x-in $2x - 6 \geq 0$, yəni $x \geq 3$ şərtini ödəyən qiymətləridir. Deməli, funksiyanın təyin oblastı $[3; +\infty)$ aralığıdır. Kvadrat kökün mənası olması üçün $2x - 6 \geq 0$ olmalıdır. Onda $\sqrt{2x-6} \geq 0$, yəni $y \geq 0$ olur. Bu isə o deməkdir ki, $y = \sqrt{2x-6}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $[0; +\infty)$ aralığıdır.

2) $y = \sqrt{4-x^2}$ funksiyasının təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapaq.

$4 - x^2 \geq 0$ olmalıdır. Bu bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[-2; 2]$ aralığıdır. Deməli, verilmiş funksiya $[-2; 2]$ parçasında təyin olunmuşdur. Təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$ olur. Buradan $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{4}$. Yəni $0 \leq y \leq 2$. Başqa sözlə, funksiyanın qiymətlər çoxluğu $[0; 2]$ parçasıdır.

4. Qrafiklə verilmiş funksiyanın təyin oblastının və qiymətlər çoxluğunun tapılması.



Nümunə. Şəkildə $y = -\frac{1}{2}x + 2$ xətti funksiyasının müəyyən aralıqda qurulmuş qrafiki verilmişdir. Qrafikə görə funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu bərabərsizliklə yazın.

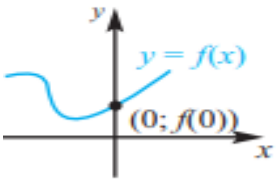
Həlli: Qrafikin uclarının rəngli və ya rəngsiz dairəciklə qeyd olunmasına görə uyğun nöqtənin absisinin təyin oblastına, ordinatının qiymətlər çoxluğuna daxil edilib-edilmədiyini müəyyənləşdirək. (2; 1) nöqtəsi rəngsiz dairəciklə göstərildiyindən $x = 2$ nöqtəsi təyin oblastına, $y = 1$ qiyməti isə qiymətlər çoxluğuna daxil deyil. Təyin oblastı: $-6 \leq x < 2$ Qiymətlər çoxluğu: $1 < y \leq 5$

Mövzu 2

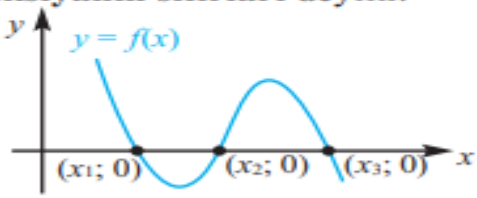
Funksiyaların xassələri. Cüt və tək funksiyalar. Hissə-hissə verilmiş funksiya. $y=x^n$ qüvvət funksiyaları.

Funksiyanın xassələrini əyani görmək üçün onun qrafiki əlverişlidir.

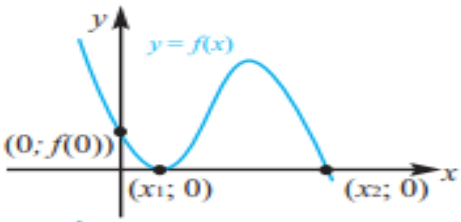
Funksiyanın sıfırları. Funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələrin absislərini müəyyən etməklə onun təyin oblastı tapılır. Funksiyanın qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrində $f(x) = 0$ olur. Arqumentin funksiyanı sıfıra çevirən qiymətlərinə **funksiyanın sıfırları** deyilir.



Sıfırı yoxdur.



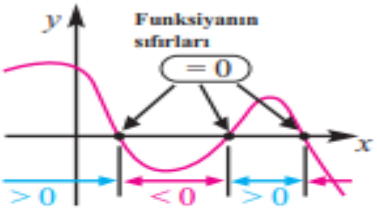
Üç sıfırı var. x_1, x_2, x_3,



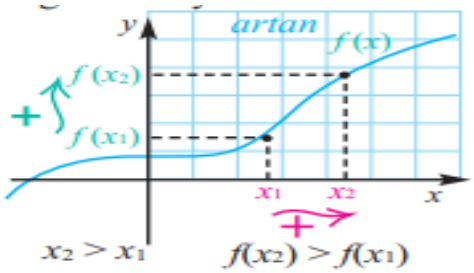
İki sıfırı var. x_1, x_2

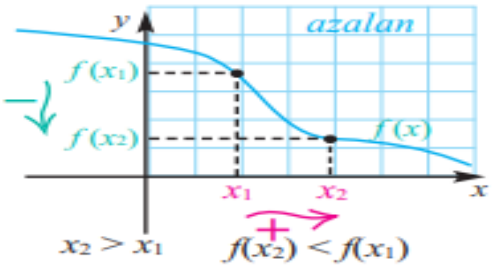
$f(x)$ funksiyasının sıfırları $f(x) = 0$ tənliyinin kökləridir.

Funksiyanın sıfırları onun təyin oblastını bir neçə aralığa bölür və bu aralıqların hər birində funksiya işarəsini sabit saxlamaqla müsbət və ya mənfi qiymətlər alır. Şəkildəki qrafikdə funksiyanın işarə sabitliyi aralıqları sxematik olaraq göstərilmişdir.



Funksiyanın artması və azalması. Təyin oblastının müəyyən aralığından götürülmüş $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1, x_2 üçün $f(x_2) > f(x_1)$ olarsa, yəni arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğundursa, **bu aralıqda $f(x)$-ə artan,** $f(x_2) < f(x_1)$ olarsa, yəni arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın kiçik qiyməti uyğundursa, **$f(x)$-ə bu aralıqda azalan funksiya** deyilir. Funksiyasının verilən aralıqda artan olmasını ↑ ilə, azalan olmasını isə ↓ ilə göstərəcəyik.





Əgər $f(x)$ funksiyası müəyyən aralıqda artandırsa (azalandırsa), $-f(x)$ funksiyası bu aralıqda azalandır (artandır).

Məsələn, $f(x) = x^2$ funksiyası $[0; +\infty)$ aralığında artan, $g(x) = -x^2$ funksiyası isə həmin aralıqda azalandır.

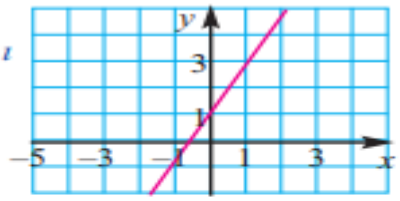
Əgər $f(x)$ funksiyası müəyyən aralıqda sıfırdan fərqli, artan (azalan) və işarəsi dəyişməyən funksiyadırsa, $\frac{1}{f(x)}$ funksiyası həmin aralıqda azalandır (artandır).

Məsələn $f(x) = x^2 + 4$ funksiyası $[0; +\infty)$ aralığında artan, $g(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ funksiyası həmin aralıqda azalandır.

Bucaq əmsalının işarəsinə görə xətti funksiyanın artan və ya azalan olduğunu müəyyən etmək olar.

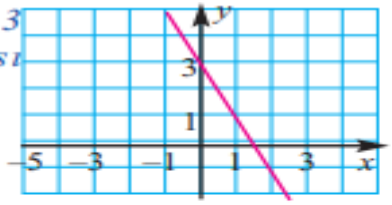
Bucaq əmsalı müsbət olan xətti funksiyalar artandır.

$y = 2x + 1$ funksiyası artandır



Bucaq əmsalı mənfi olan xətti funksiyalar azalandır.

$y = -2x + 3$ funksiyası azalandır



$f(x) = kx + b$ funksiyasının $k > 0$ olduqda bütün ədəd oxunda artan, $k < 0$ olduqda azalan funksiya olduğunu analitik üsulla göstərək.

Arqumentin $(-\infty; +\infty)$ aralığında götürülmüş və $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən iki qiyməti üçün $f(x_2) - f(x_1)$ fərqinə baxaq:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k \cdot (x_2 - x_1).$$

Şərtə görə $x_2 > x_1$ olduğundan $f(x_2) - f(x_1)$ fərqinin işarəsi k-nın işarəsi ilə eynidir. Deməli, $k > 0$ olduqda $f(x_2) > f(x_1)$, yəni funksiya artandır, $k < 0$ olduqda isə $f(x_2) < f(x_1)$, yəni funksiya azalandır.

Verilmiş aralıqda artan və ya azalan funksiyalara həmin aralıqda **monoton** funksiyalar deyilir.

Qrafik üzərində artmanın azalma ilə və ya azalmanın artma ilə əvəz olunduğu nöqtələr uyğun olaraq, funksiyanın maksimum və minimumunu göstərir.

x_0 nöqtəsinin daxil olduğu ixtiyari intervala bu **nöqtənin ətrafı** deyilir.

x_0-ın müəyyən ətrafında x_0-dan fərqli bütün x-lər üçün $f(x) > f(x_0)$ olarsa, x_0-a $f(x)$-in **minimum nöqtəsi**, $f(x_0)$-a isə **minimum qiyməti** deyilir.

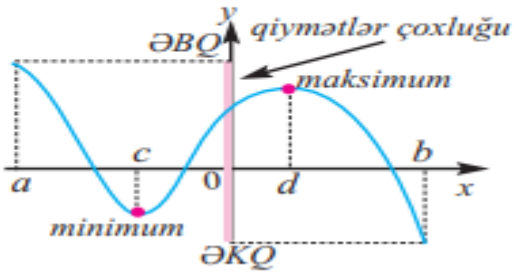
x_0-ın müəyyən ətrafında x_0-dan fərqli bütün x-lər üçün $f(x) < f(x_0)$ olarsa, x_0-a $f(x)$-in **maksimum nöqtəsi**, $f(x_0)$-a isə **maksimum qiyməti** deyilir.

Maksimum və minimum nöqtələri x_{max}, x_{min} kimi işarə edilir və ekstremum nöqtələri, funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri isə ekstremumları adlanır.

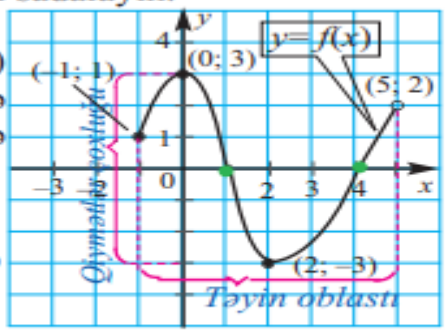
Qrafiki verilmiş funksiya $x = c$ nöqtəsində minimuma, $x = d$ nöqtəsində isə maksimuma malikdir. Bu belə yazılır:

$x_{min} = c$, $f_{min} = f(c)$, $x_{max} = d$, $f_{max} = f(d)$.

Bütün təyin oblastında funksiyanın qiymətləri içərisində ən böyüyü ƏBQ, ən kiçiyi isə ƏKQ ilə (əgər varsa) işarə edilir. Funksiya kəsilməzdirsə (verilmiş aralıqda qrafiki bütöv xətdirsə), ƏKQ ilə ƏBQ arasındakı bütün qiymətləri alır.



Nümunə. Qrafiki verilmiş funksiyanın xassələrini sadalayın.



Həlli: **1.** Funksiyanın **təyin oblastı** $[-1;\ 5)$ aralığıdır. $x = -1$ olduqda $f(-1) = 1$ (uyğun nöqtə rəngli dairəciklə göstərilib). $(5; 2)$ nöqtəsi isə qrafikə aid deyil (rəngsiz dairəciklə göstərilib). Funksiyanın **qiymətlər çoxluğu** $[-3; 3]$ aralığıdır.

2. Funksiyanın sıfırları. Qrafikin x oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absisləri: $x = 1$ və $x = 4$. Deməli, $x = 1$ və $x = 4$ funksiyanın sıfırlarıdır: $f(1) = 0$, $f(4) = 0$

Funksiyanın sıfırları onun təyin oblastını funksiyanın işarəsini sabit saxladığı üç aralığa bölür: $[-1;\ 1)$, $(1;\ 4)$ və $(4;\ 5)$. Funksiya $(1;\ 4)$ aralığında mənfi, $[-1;\ 1)$ və $(4;\ 5)$ aralıqlarının hər birində müsbət qiymətlər alır.

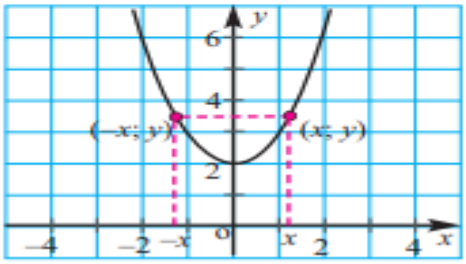
3. Funksiyanın artması və azalması. Qrafikdən görünür ki, x-in -1-dən 0-a kimi artması ilə y-in qiymətləri 1-dən 3-ə kimi artır, x-in 0-dan 2-yə kimi artması ilə y-in qiymətləri 3-dən -3-ə kimi azalır, x-in 2-dən 5-ə qədər artması ilə y-in qiymətləri -3-dən 2-yə kimi artır.

Funksiya $[-1;\ 0]$ və $[2;\ 5)$ aralıqlarının hər birində artandır, $[0;\ 2]$ aralığında isə azalandır.

4. Funksiyanın ekstremumları – maksimumu və minimumu. Qrafik üzərindəki $(0;\ 3)$ və $(2;\ -3)$ nöqtələri ekstremum nöqtələridir. Bu nöqtələr uyğun olaraq funksiyanın maksimumunu və minimumunu göstərir: $x_{max} = 0$, $f_{max} = 3$, $x_{min} = 2$, $f_{min} = -3$.

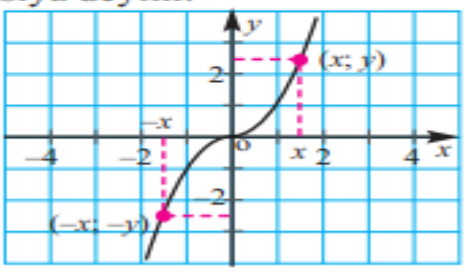
Təyin oblastı $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik olan funksiyalara baxaq.

Təyin oblastından götürülmüş ixtiyari x üçün $f(-x) = f(x)$ olarsa, $f(x)$-ə cüt funksiya deyilir.



Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.

Təyin oblastından götürülmüş ixtiyari x üçün $f(-x) = -f(x)$ olarsa, $f(x)$-ə tək funksiya deyilir.



Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. $f(x)$ tək funksiyası $x = 0$ nöqtəsində təyin olunubsa, onda $f(0) = 0$.

Heç də bütün funksiyalar tək və ya cüt funksiya olmur. Əgər funksiyanın təyin oblastı $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik deyilsə, funksiya nə tək, nə də cütdür. Təyin oblastı $x = 0$-a nəzərən simmetrik olan funksiya üçün $f(-x) = f(x)$ və $f(-x) = -f(x)$ şərtləri pozulduqda da funksiya nə tək, nə də cütdür.

Nümunə 1. $f(x) = x^2 + x$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın.

Həlli: Funksiyanın təyin oblastı olan bütün həqiqi ədədlər çoxluğu $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir. Lakin, $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ olduğuna görə $f(-x) \neq f(x)$ və $f(-x) \neq -f(x)$.

Deməli, verilən funksiya nə tək, nə də cütdür.

Nümunə 2. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2}$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın.

Həlli: Funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur və

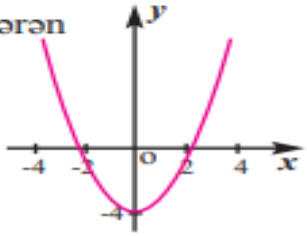
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 2} = \frac{-(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -\frac{(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x)$ olduğundan verilən funksiya tək funksiyadır.

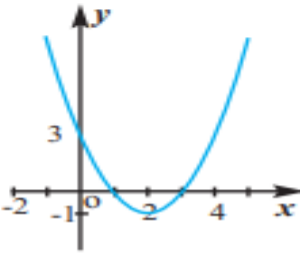
Nümunə 3. Funksiyanın qrafikinə görə tək-cütlüyünü araşdırın.

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir. Cüt funksiyadır.



Funksiyanın qrafiki nə ordinat oxuna nəzərən, nə də koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Funksiya nə tək, nə də cütdür.



Real həyati situasiyalarda dəyişən kəmiyyətlər arasındakı asılılıqlar bir çox hallarda bir deyil, bir neçə düstur və bərabərsizliklə ifadə edilir.

Məsələ. Topdansatış mağazasında ən azı 10, ən çoxu 20 idman köynəyi alanlar üçün bir köynəyin qiyməti 3 manat, 20-dən çox köynək alanlar üçün isə bir köynəyin qiyməti 2 manatdır. Satışdan daxil olan pulu C, satılan köynəklərin sayını n qəbul etməklə bu iki kəmiyyət arasındakı asılılığı yazın.

Həlli: Bu situasiyanı $C(n) = 3 \cdot n$, $10 \le n \le 20$ olduqda və $C(n) = 2 \cdot n$, $n > 20$ olduqda funksiyaları ilə ümumi şəkildə aşağıdakı yazılışla ifadə etmək olar:

$$C(n) = \begin{cases} 3 \cdot n, & 10 \le n \le 20 \\ 2 \cdot n, & n > 20 \end{cases}$$

$n = 15$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ olduqda $C(n)$ funksiyasının qiymətlərini tapaq.

$n = 15$ və $n = 20$ qiymətləri $10 \le n \le 20$ şərtini ödədiyi üçün əldə olunan pulu $3 \cdot n$ düsturu ilə hesablamalıyıq:

$C(15) = 3 \cdot 15 = 45$, $C(20) = 3 \cdot 20 = 60$.

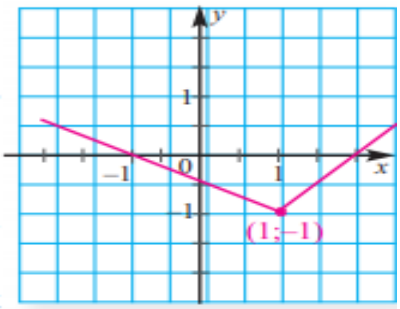
$n = 30$ və $n = 40$ qiymətləri $n > 20$ şərtinə uyğundur:

$C(30) = 2 \cdot 30 = 60$, $C(40) = 2 \cdot 40 = 80$.

Təyin oblastının müxtəlif aralıqlarında müxtəlif düsturlarla verilən funksiyalara **hissə-hissə verilmiş funksiyalar** deyilir.

Nümunə 1. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x < 1 \text{ olduqda} \\ x - 2, & x \ge 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$



Həlli: Bu funksiyanın qrafiki $x = 1$ nöqtəsindən solda $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ düz xəttinin, $x = 1$-dən sağda isə $y = x - 2$ düz xəttinin üzərinə düşür.

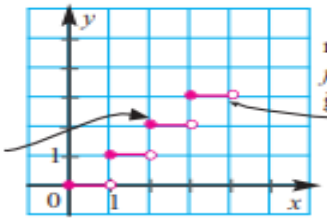
$f(1) = -1$ olduğuna görə verilən funksiyanın qrafiki təpəsi $(1; -1)$ nöqtəsində olan sınıq xətdir.

Qələmi "vərəqdən ayırmadan" qrafiki təsvir etmək olursa, funksiya kəsilməzdir deyilir. Nümunədə verilən funksiya kəsilməzdir.

Nümunə 2. Funksiyanın qrafikini qurun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ əgər } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{ əgər } 1 \le x < 2 \\ 2, \text{ əgər } 2 \le x < 3 \\ 3, \text{ əgər } 3 \le x < 4 \end{cases}$$

rəngli dairəcik $f(2) = 2$ olduğunu göstərir



rəngsiz dairəcik $f(4) \ne 3$ olduğunu göstərir

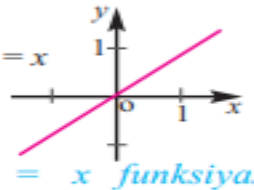
Bu funksiyanın qrafiki pilləvari hissələrdən ibarətdir. Qrafiki qırıq xətt olduğundan funksiya kəsiləndir.

Hər bir ədədə bu ədədin tam hissəsini qarşı qoyan tam hissə funksiyası $f(x) = [x]$ kimi yazılır. Qurulan qrafik tam hissə funksiyasının $[0; 4)$ aralığındakı qrafikidir.

n natural ədəd olduqda $y = x^n$ şəklində funksiyaya natural üstlü qüvvət funksiyası deyilir.

$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ olduqda qüvvət funksiyalarının qrafikləri aşağıda verilmişdir.

a) $y = x$

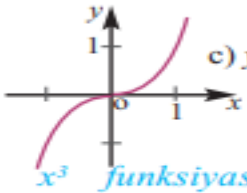


$y = x$ funksiyasının qrafiki düz xətdir.

b) $y = x^2$

$y = x^2$ funksiyasının qrafiki paraboladır.

c) $y = x^3$

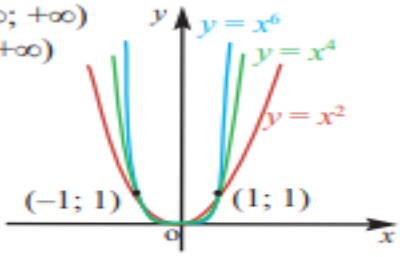


$y = x^3$ funksiyasının qrafiki kub paraboladır.

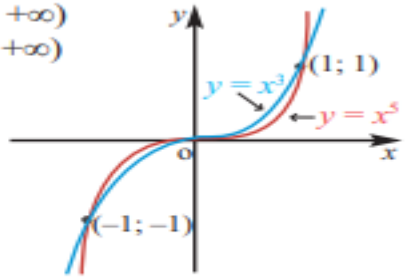
$y = x^n$ funksiyasının qrafiki n-in istənilən cüt qiymətində ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir və $y = x^2$ parabolasına oxşardır.

n-in istənilən tək qiymətində $y = x^n$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir və n-in 1-dən böyük tək qiymətlərində $y = x^3$-nun qrafiki olan kub parabolaya oxşardır.

$D(x^{2k}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k}) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0] \searrow$
$[0; +\infty) \nearrow$
$x_{min} = 0$;
$f_{min} = 0$



$D(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; +\infty) \nearrow$
ekstremumu yoxdur

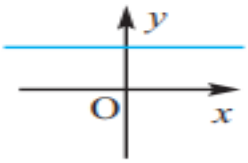
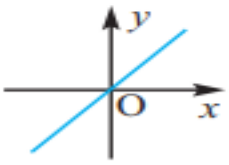
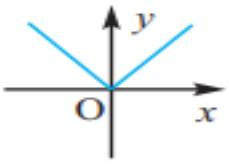
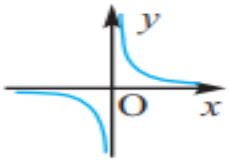


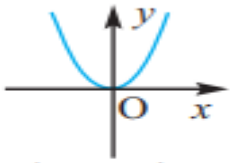
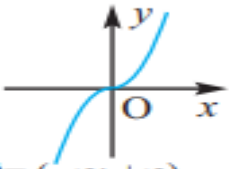
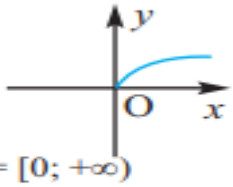
$n > 1$, $n \in N$ olduqda x^n funksiyasının qrafiki ***n* tərtibli parabola** adlanır. Qrafiklərdən göründüyü kimi, $n > m$ olduqda $(0; 1)$ aralığında x^n funksiyasının qrafiki x^m funksiyasının qrafikindən aşağıda, $(1; +\infty)$ aralığında isə yuxarıda yerləşir.

Dəyişən kəmiyyətlər olduqca müxtəlifdirlər. Lakin ilk baxışdan bir-biri ilə əlaqəsi görünməyən proseslərdə kəmiyyətlərin dəyişmələri təbiətcə eyni olan asılılıqla verilə bilir. Buna görə ən çox rast gəlinən asılılıqlara uyğun (ana) funksiya əsas götürülür və bu əsas funksiyanın üzərində aparılan çevrilmələrlə alınan funksiyalar bir ailədə birləşdirilir.

Məsələn, $y = 2x^2 + 1$, $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = -3x^2$ funksiyalarının qrafikləri $y = x^2$ parabolası üzərində aparılan çevrilmələrlə alınır. Ona görə də bu funksiyalar, eləcə də $y = a(x - m)^2 + n$ düsturu ilə verilən bütün funksiyalar bir ailəyə daxil edilir və bu ailənin əsas funksiyası isə $y = x^2$ hesab edilir.

Aşağıdakı cədvəldə bəzi əsas funksiyaların qrafikləri və onlar haqqında bir sıra məlumatlar verilmişdir.

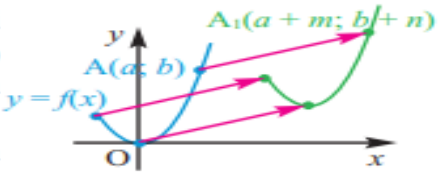
Sabit funksiya	Eynilik funksiyası	Modul funksiyası	Rasional funksiya
$f(x) = c$	$f(x) = x$	$f(x) = \lvert x \rvert$	$f(x) = \frac{1}{x}$
			
$D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = \{c\}$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; +\infty)$ Sıfrı: $x = 0$ Artan funksiyadır Ekstremumu yoxdur	$D(f) = (-\infty; +\infty)$ $E(f) = [0; +\infty)$ Sıfrı: $x = 0$ $(-\infty; 0] \searrow$, $[0; +\infty) \nearrow$ $(0; 0)$ nöqtəsində minimum	$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ Sıfrı yoxdur $(-\infty; 0) \searrow$, $(0; +\infty) \searrow$ Ekstremumu yoxdur

Kvadrat funksiyası	Kub funksiyası	Kvadrat kök funksiyası
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = \sqrt{x}$
		
$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = [0; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$	$E(f) = (-\infty; +\infty)$	$E(f) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$	Sıfrı: $x = 0$	Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0] \downarrow$, $[0; +\infty) \uparrow$	Artan funksiyadır	$[0; +\infty) \uparrow$
$(0; 0)$ nöqtəsində minimum	Ekstremumu yoxdur	Ekstremumu yoxdur

Mövzu 3
Qrafiklərin çevrilməsi. Funksiyalar üzərində əməllər.

Paralel köçürmədə qrafikin bütün nöqtələri verilən istiqamətdə eyni məsafə qədər yerini dəyişir. Qrafikin forması isə dəyişmir.

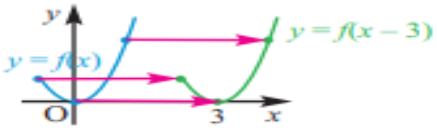
$y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin hər bir nöqtəsini $\langle m; n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürək: $A(a; b) \longrightarrow A_1(a + m; b + n)$



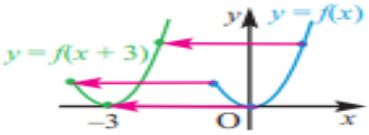
A nöqtəsinin koordinatları $b = f(a)$ bərabərliyini ödədikdə A_1 nöqtəsinin koordinatları $y - n = f(x - m)$ bərabərliyini ödəyir. Yəni $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini $\langle m; n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürdükdə $y = f(x - m) + n$ funksiyasının qrafiki alınır: verilən qrafik üfüqi istiqamətdə $|m|$ vahid ($m > 0$ olduqda sağa, $m < 0$ olduqda sola), şaquli istiqamətdə $|n|$ vahid ($n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı) sürüşdürülür.

$n = 0$ halında qrafik yalnız üfüqi istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x - m)$ olur.

Nümunə.



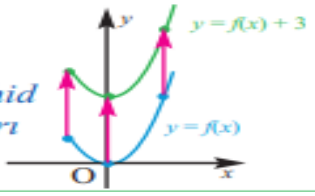
3 vahid sağa



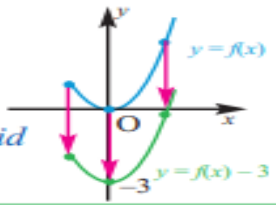
3 vahid sola

$m = 0$ halında qrafik yalnız şaquli istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x) + n$ olur.

Nümunə.



3 vahid yuxarı



3 vahid aşağı

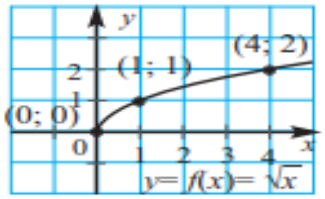
Nümunə. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə verilən funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $g(x) = \sqrt{x} - 1$ b) $h(x) = \sqrt{x - 1}$ c) $m(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

Həlli: $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikini quraq. Funksiyanın təyin oblastı: $[0; \infty)$. Bu oblastdan tam kvadrat olan üç qiymət (0;1;4) seçməklə cədvəl quraq.

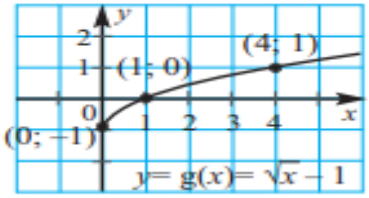
x	$f(x)$	$(x; f(x))$
0	0	(0; 0)
1	1	(1; 1)
4	2	(4; 2)

a)

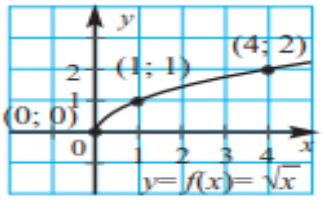


$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki 1 vahid aşağı sürüşdürülür, qrafikin üzərindəki hər bir nöqtənin ordinatından 1 çıxılır.

$\mathbf{g(x) = f(x) - 1}$

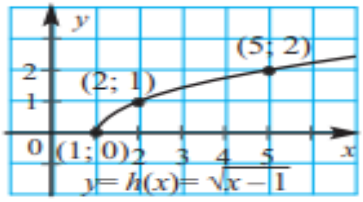


b)

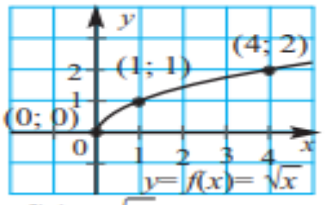


$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki 1 vahid sağa sürüşdürülür.

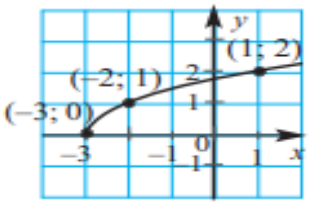
$\mathbf{h(x) = f(x - 1)}$



c)



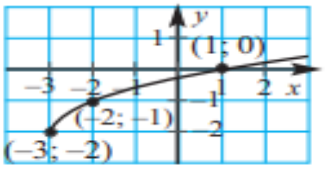
$f(x) = \sqrt{x}$



$y = m_1(x) = f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$

qrafik 3 vahid sola sürüşdürülür.

$\mathbf{m_1(x) = f(x+3)}$



$y = m(x) = m_1(x) - 2 = \sqrt{x + 3} - 2$

qrafik 2 vahid aşağı sürüşdürülür.

$\mathbf{m(x) = f(x+3) - 2}$

Verilən funksiyalar üzərində hesab əməlləri aparmaqla yeni funksiya almaq olar. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları üzərində aparılmış toplama, çıxma, vurma əməlləri nəticəsində alınan funksiyanın təyin oblastı bu funksiyaların hər ikisinin təyin olunduğu həqiqi ədədlər çoxluğudur. Başqa sözlə, yeni funksiyanın təyin oblastı $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının təyin oblastlarının kəsişməsidir: $D = D(f) \cap D(g)$. Funksiyaların nisbəti isə arqumentin D çoxluğundan olan və məxrəcdəki funksiyanı sıfırdan fərqli edən qiymətləri üçün təyin edilir. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları müəyyən həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş istənilən funksiya olarsa, onlar üzərində toplama, çıxma, vurma, bölmə əməlləri aşağıdakı qayda ilə yerinə yetirilir.

Əməl	Riyazi yazılış	Nümunə $f(x) = x + 5$ və $g(x) = 3x$
Toplama	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(x + 5) + 3x = 4x + 5$
Çıxma	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(x + 5) - 3x = -2x + 5$
Vurma	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(x + 5) \cdot 3x = 3x^2 + 15x$
Bölmə	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$\frac{x + 5}{3x}$

1) İki cüt funksiyanın cəmi cüt, iki tək funksiyanın cəmi tək funksiyadır.
2) İki cüt funksiyanın və iki tək funksiyanın hasili (nisbəti) cüt funksiya, cüt funksiya ilə tək funksiyanın hasili (nisbəti) tək funksiyadır.

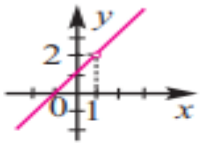
Nümunə 1. $f(x) = x^2 + 1$ və $g(x) = x + 2$ olduğuna görə $(f + g)(2)$ -ni tapın.

Həlli: $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, $g(2) = 2 + 2 = 4$, $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 4 = 9$

Nümunə 2. $f(x) = x^2 - 1$ və $g(x) = x - 1$ olarsa, $(\frac{f}{g})(x)$-i tapın.

Həlli:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$



Məxrəcdəki funksiyanın $g(x) \neq 0$ şərtinə görə burada $x \neq 1$ olmalıdır. Bu funksiyanın qrafiki $y = x + 1$ düz xəttindən $(1; 2)$ nöqtəsini kənarlaşdırmaqla alınır.

Nümunə 3. $f(x) = 3x^2 - 1$ və $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ olduğuna görə

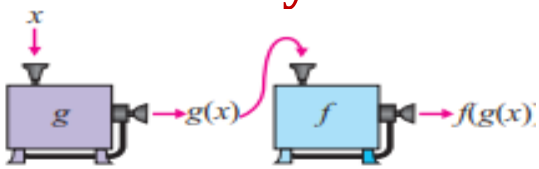
a) $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, b) $\frac{f}{g}$ funksiyalarının təyin oblastlarını tapın.

Həlli: a) $f(x) = 3x^2 - 1$ funksiyasının təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ funksiyasının təyin oblastı $2x - 1 \geq 0$ bərabərsizliyindən tapılır: $[\frac{1}{2}; +\infty)$. $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ funksiyalarının təyin oblastı: $(-\infty; +\infty) \cap [\frac{1}{2}, +\infty) = [\frac{1}{2}; +\infty)$

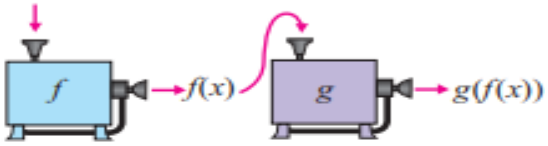
b) $\frac{f}{g}$ funksiyasının təyin oblastı $2x - 1 > 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu olan $(\frac{1}{2}; +\infty)$ aralığıdır.

Mövzu 4
Mürəkkəb funksiya. Tərs funksiya

Bir çox hallarda funksiyanın arqumentinin ala bildiyi qiymətlər digər funksiyanın qiymətləri ilə müəyyən edilir. Tutaq ki, f və g funksiyaları verilmişdir. İki situasiyanı sxematik təsvirlər üzərində nəzərdən keçirək.

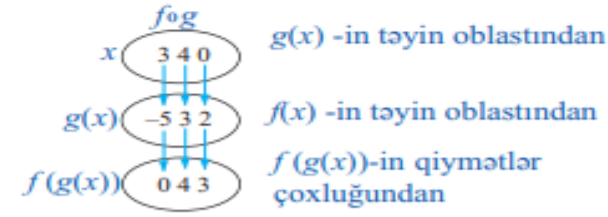


1. x ədədləri g funksiyasının təyin oblastına, $g(x)$-lər isə f funksiyasının təyin oblastına daxildir. Bu halda hər $x \in D(g)$ ədədinə $f(g(x))$ ədədini qarşı qoyan funksiyaya f və g funksiyalarının mürəkkəb funksiyası (kompozisiyası) deyilir və $(f \circ g)(x)$ kimi yazılır: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

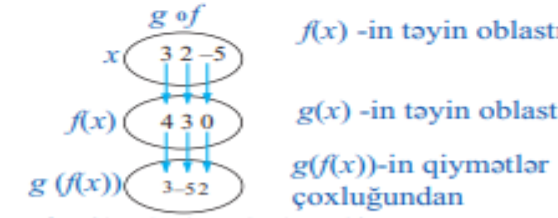


2. x ədədləri f funksiyasının təyin oblastına, $f(x)$-lər isə g funksiyasının təyin oblastına daxildir. Bu halda g və f funksiyalarının kompozisiyası $(g \circ f)(x)$ kimi olur: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Diqqət edin! $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ yazılışları (həmçinin $f(g(x))$ və $g(f(x))$ yazılışları) iki müxtəlif mürəkkəb funksiyanı ifadə edir. $f(g(x))$ kompozisiyası $E(g) \subset D(f)$ olduqda, $g(f(x))$ kompozisiyası isə $E(f) \subset D(g)$ olduqda qurula bilər.



$f \circ g = \{(3;0), (4;4), (0;3)\}$



$g \circ f = \{(3;3), (2;-5), (-5;2)\}$

Sxematik təsvirdən də göründüyü kimi, $f \circ g$ kompozisiyası $f(x)$ funksiyasında x arqumentinin əvəzinə $g(x)$ yazmaqla alınır. Eyni qayda ilə $g \circ f$ kompozisiyası $g(x)$ funksiyasında x arqumentinin əvəzinə $f(x)$ yazmaqla alınır.

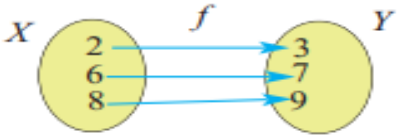
Nümunə 1. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$ olduqda: a) $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyalarının düsturlarını yazın; b) $x = 3$ qiymətində $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyalarının qiymətlərini hesablayın.

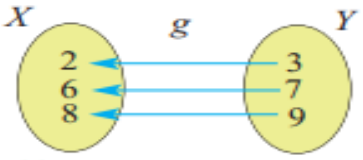
Həlli: a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x - 3 + 2 = x^2 - 2x - 1$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$
Deməli, $f(g(x)) = x^2 - 2x - 1$ və $g(f(x)) = x^2 + 2x - 3$
b) $(f \circ g)(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$
$(g \circ f)(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

Nümunə 2. $h(x) = f(g(x))$ olarsa, verilənlərə görə $f(x)$ funksiyasını düsturla yazın. a) $h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$; $g(x) = x - 2$
b) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; $g(x) = x^3 + 1$

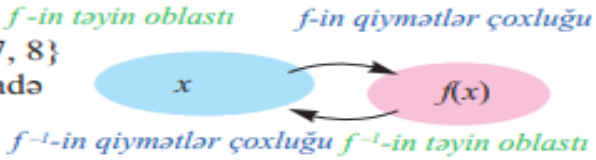
Həlli:
a) $f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 1$ olduğundan $f(x) = x^2 + x + 1$
b) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$ olduğundan $f(x) = \sqrt{x}$

Nümunə 1. Şəkildə X çoxluğu ilə Y çoxluğu arasındakı f uyğunluğu oxlarla verilmişdir. Oxların istiqamətini dəyişsək, başqa uyğunluq – Y çoxluğu ilə X çoxluğu arasındakı g uyğunluğunu alarıq. g uyğunluğu f-ə tərs uyğunluqdur. Verilən f funksiyası üçün tərs uyğunluq funksiya olarsa, f-ə dönən funksiya deyilir.



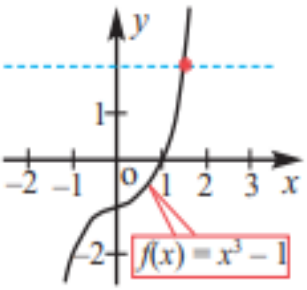


Nümunə 2. $f(x) = x + 4$ funksiyası ilə $A = \{1, 2, 3, 4\}$ çoxluğundan $B = \{5, 6, 7, 8\}$ çoxluğunun alınmasını aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.
$f(x) = x + 4$: $\{(1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8)\}$

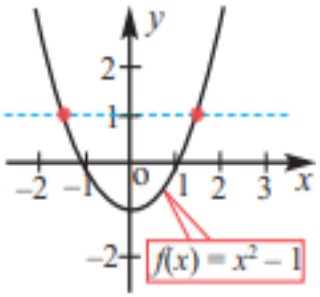


Bu funksiyanın tərsi olan və f^{-1} kimi işarə edilən funksiya isə B çoxluğundan A çoxluğunun elementlərinin alınmasını ifadə edir və onu
$f^{-1}(x) = x - 4$: $\{(5; 1), (6; 2), (7; 3), (8; 4)\}$ kimi ifadə etmək olar.
$f(x)$ və $f^{-1}(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır.
Sxematik təsvirdən və koordinat cütlərindən göründüyü kimi, verilən funksiyanın təyin oblastı tərs funksiyanın qiymətlər çoxluğu, verilən funksiyanın qiymətlər çoxluğu isə tərs funksiyanın təyin oblastı olur və əksinə.
Yəni, $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$. Buradan alınır ki, $f(f^{-1}(x)) = x$ və $f^{-1}(f(x)) = x$
Nümunədə verilənlərə görə: $f(f^{-1}(x)) = f(x - 4) = (x - 4) + 4 = x$
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 4) = (x + 4) - 4 = x$

İstənilən funksiya üçün tərs funksiyanın varlığı həmişə mümkündürmü? Məsələn, $y = 2x + 5$ münasibətindən x-i y vasitəsilə birqiymətli ifadə etmək mümkündür və bu halda tərs funksiya var: $x = \frac{y - 5}{2}$.
Burada y-in hər bir qiymətinə x-in yalnız bir qiyməti uyğun gəlir. $y = x^2$ funksiyasında isə y-in bir qiymətinə, məsələn, $y = 9$ qiymətinə arqumentin $x = 3$, və $x = -3$ kimi iki qiyməti uyğun gəldiyindən, $(-\infty; +\infty)$ aralığında bu funksiyanın tərsi yoxdur. Özünün hər bir qiymətini təyin oblastının yalnız bir nöqtəsində alan funksiyaya tərsi olan (dönən) funksiya deyilir. İstənilən üfüqi düz xətt funksiyanın qrafikini ən çoxu bir nöqtədə kəsərsə, bu funksiyanın tərsi var.



tərsi var



tərsi yoxdur

Başqa sözlə, x-in müxtəlif qiymətlərinə y-in müxtəlif qiymətləri uyğun olarsa, $y = f(x)$ funksiyasının tərsi var.

Monoton funksiyalar üçün $x_1 \neq x_2$ olduqda $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan alırıq:

1) Təyin oblastında artan funksiyanın tərsi var.

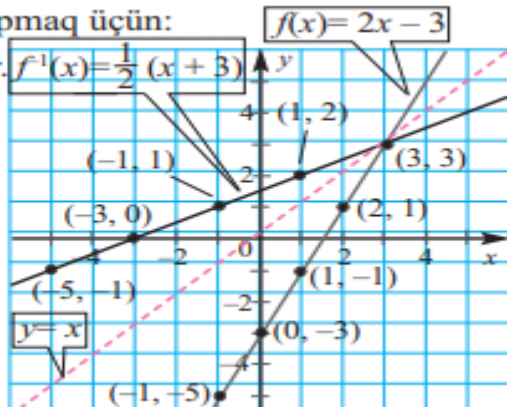
2) Təyin oblastında azalan funksiyanın tərsi var.

Tutaq ki, $y = f(x)$ tərsi olan funksiyadır, yəni $y = f(x)$ münasibətindən x-i y vasitəsilə birqiymətli ifadə edərək, $x = f^{-1}(y)$ kimi yazmaq mümkündür. Onda $x = f^{-1}(y)$ funksiyasına $y = f(x)$ funksiyasının tərs funksiyası deyilir.

Düsturla verilmiş funksiyanın tərs funksiyasını tapmaq üçün:

1)Verilmiş bərabərlikdən x dəyişəni y-lə ifadə edilir.

2)Alınmış bərabərlikdə x-in əvəzinə y, y-in əvəzinə x yazılır.



Nümunə 3. $y = 2x - 3$ funksiyasına tərs funksiyanın düsturunu yazın.

Həlli: Verilən funksiya yazılır: $y = 2x - 3$

x dəyişəni y-dən asılı ifadə edilir: $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

x-lə y-in yeri dəyişdirilir: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Mövzu 5

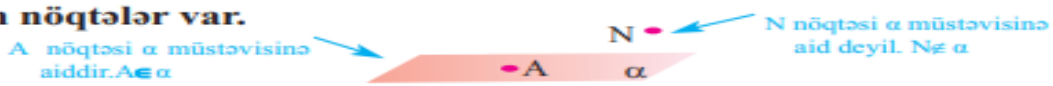
Fəzada nöqtə, düz xətt və müstəvi. Fəzada düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti. Düz xətt və müstəvilərin paralelliyi. Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı. Düz xətt və müstəvi arasındakı bucaq.

Həndəsənin planimetriya bölməsində bütün nöqtələri eyni müstəvidə olan fiqurlar öyrənilir. Bu fiqurlara müstəvi fiqurlar deyilir. Lakin bizi reallıqda üçölçülü əşyalar, obyektlər əhatə edir. Onların en, uzunluq və hündürlük (dərinliyi) kimi üç ölçüsü var. Bu fiqurlar fəza fiqurları adlanır. Həndəsənin fəza fiqurlarını öyrənən bölməsi **stereometriya** adlanır.

Nöqtə, düz xətt, müstəvi həm də fəza fiqurları kimi qəbul edilir. Müstəvi sonsuzdur, şərti olaraq adətən, paraleloqram şəklində təsvir edilir, bir kiçik hərflə və ya (bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəni göstərən) üç hərflə işarə edilir. Məsələn, α müstəvisi və ya ABC müstəvisi.

Fəzanın hər bir müstəvisi üzərində planimetriyadan məlum olan aksiom və teoremlər doğrudur. Fəzada aşağıdakı əlavə aksiomlar qəbul edilir.

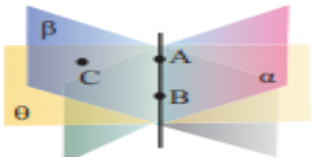
Aksiom 1. İxtiyari müstəvi üçün bu müstəviyə aid olan nöqtələr və ona aid olmayan nöqtələr var.



Aksiom 2. İki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onda onlar bu nöqtədən keçən düz xətt üzrə kəsişirlər.

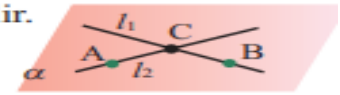
Düz xətt iki nöqtəsi ilə təyin edilir, yəni iki nöqtədən bir və yalnız bir düz xətt keçirmək mümkündür (bəs, bir nöqtədən?). Müstəvini neçə nöqtə təyin edir?

İki nöqtə müstəvini müəyyən etmir. Şəkildən göründüyü kimi, A və B nöqtələrindən sonsuz sayda müstəvi keçirmək olar. Lakin onlar arasında elə müstəvi var ki, C nöqtəsi məhz onun üzərindədir. Deməli, müstəvini bir düz xətt üzərində olmayan 3 nöqtə müəyyən edir.



Aksiom 3. Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrə **kollinear nöqtələr** deyilir.



Stereometriya aksiomlarından aşağıdakı nəticələr alınır.

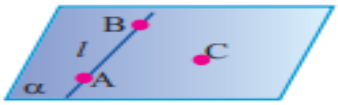
1. Düz xətt və bu düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

2. İki kəsişən düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

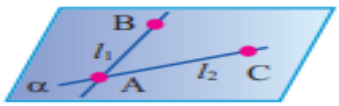
3. Müxtəlif iki paralel düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Beləliklə, müstəvini: 1) düz xətt və onun üzərində olmayan bir nöqtə ilə; 2) iki kəsişən düz xətt ilə; 3) iki paralel düz xətlə təyin etmək olar.

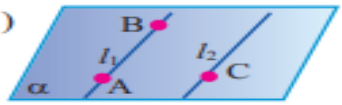
1)



2)



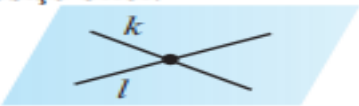
3)



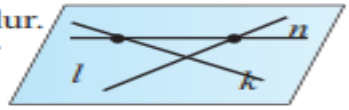
Eyni müstəvi üzərində yerləşən nöqtələrə **komplanar nöqtələr** deyilir.

Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

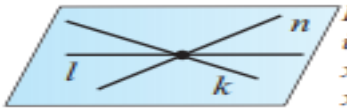
Fəzada iki düz xətt paralel ola bilər(xüsusi halda üst-üstə düşə bilər). Fəzada iki düz xətt kəsişə bilər.



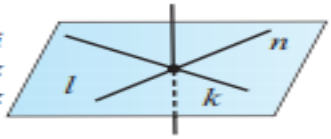
Məlumdur ki, l və k düz xətləri kəsişirsə və ya paraleldirsə, onda onlar bir müstəvi üzərindədirlər. Bu iki hal planimetriyada düz xətlərin kəsişməsi və paralelliyinə uyğundur. İki kəsişən düz xətti üçüncü düz xətt müxtəlif nöqtələrdə kəsərsə, bu düz xətlər bir müstəvi üzərində yerləşir. Fəzada iki düz xətt üçüncü düz xətlə bir nöqtədə kəsişirsə, bu düz xətlər eyni müstəvi üzərində ola da bilər, olmaya da bilər.



Düz xətlər eyni müstəvi üzərindədirlər.



Düz xətlər eyni müstəvi üzərindədirlər. Belə düz xətlər komplanar düz xətlər adlanır.

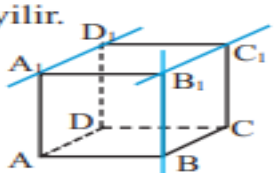


Düz xətlər müxtəlif müstəvilər üzərindədirlər. Bu düz xətlər komplanar deyillər.

Fəzada paralel olmayan iki düz xətt kəsişməyə də bilər. Paralel olmayan və kəsişməyən iki düz xəttə **çarpaz düz xətlər** deyilir.

a və b düz xətlərinin çarpazlığı $a \bullet b$ kimi yazılır. İki çarpaz düz xəttin hər ikisindən bir müstəvi keçirmək mümkün deyil. İki çarpaz düz xətt arasındakı bucaq, uyğun olaraq, onlara paralel olan iki kəsişən düz xətt arasındakı bucağa deyilir.

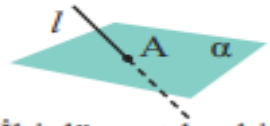
Nümunə. Kubun modeli üzərində $A_1D_1 \bullet BB_1$.



$A_1D_1 \parallel B_1C_1$ olduğundan, A_1D_1 və BB_1 çarpaz düz xətləri arasındakı bucaq B_1C_1 və BB_1 düz xətləri arasındakı bucağa bərabərdir və bu halda 90°-dir.

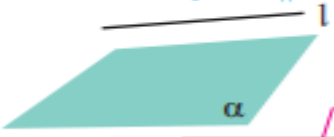
Düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətləri

Düz xətlə müstəvinin yalnız bir ortaq nöqtəsi varsa, onda bu düz xətlə müstəvi kəsişirlər. $l \cap \alpha = A$

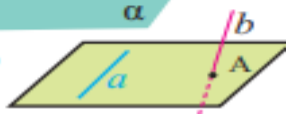


Düz xəttin iki nöqtəsi müstəvi üzərindədirsə düz xətt bütünlüklə müstəvi üzərindədir. $l \subset \alpha$

Ortaq nöqtəsi olmayan düz xətt və müstəviyə paralel düz xətt və müstəvi deyilir. $l \parallel \alpha$

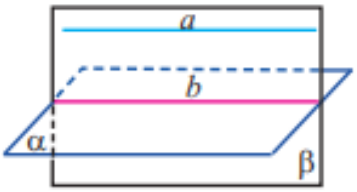


İki düz xətdən biri digərinin yerləşdiyi müstəvini bu düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsərsə, onda bu düz xətlər çarpazdır.

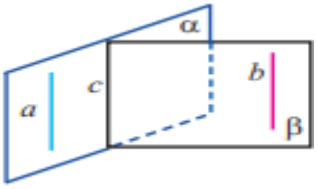


Düz xətlə müstəvinin paralelliyi

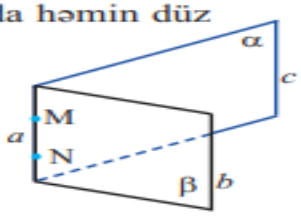
Teorem 1. (Düz xəttin müstəviyə paralellik əlaməti) Müstəvi üzərində olmayan düz xətt, bu müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, müstəvinin özünə də paraleldir.



Teorem 2. Paralel düz xətlərdən keçən iki müstəvi kəsişirsə, onda onların kəsişmə xətti bu düz xətlərə paraleldir.

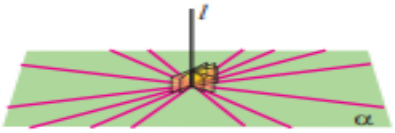


Teorem 3. İki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, onda həmin düz xətlər bir-birinə paraleldir.

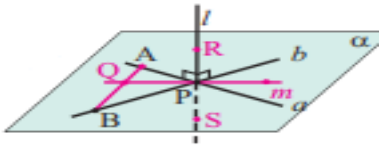


Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı

Tərif. Müstəvini (α) kəsən düz xətt (l) müstəvi üzərində olan və kəsişmə nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xəttə perpendikulyardırsa, onda bu düz xətt müstəviyə perpendikulyardır və bu $l \perp \alpha$ kimi yazılır.



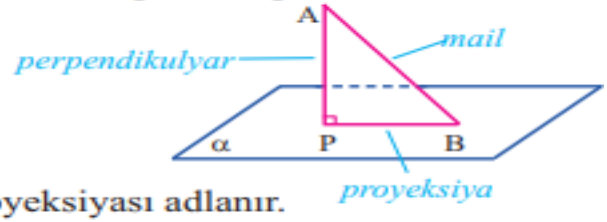
Teorem 1. (Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlıq əlaməti) Müstəvini kəsən düz xətt, onun üzərindəki iki kəsişən düz xəttə perpendikulyardırsa, müstəvinin özünə də perpendikulyardır.



Teorem 2. Düz xətt üzərində verilmiş nöqtədən bu düz xəttə perpendikulyar olan bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Teorem 3. Müstəvinin verilmiş nöqtəsindən bu müstəviyə bir və yalnız bir perpendikulyar düz xətt keçirmək olar.

Fəzanın A nöqtəsindən keçən və P nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyar olan düz xəttin AP parçasına A nöqtəsindən α müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyar deyilir. A nöqtəsi ilə α müstəvisinin qalan nöqtələrini birləşdirən parçalara mail deyilir.

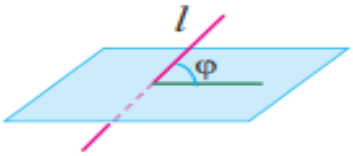


AP parçası – müstəviyə perpendikulyar,
AB parçası – mail,
P nöqtəsi – perpendikulyarın oturacağı,
B nöqtəsi – mailin oturacağı,
BP parçası – mailin müstəvi üzərində proyeksiyası adlanır.

Müstəvi xaricindəki nöqtədən ona perpendikulyar və maillər çəkilərsə:
1) perpendikulyar maildən kiçikdir;
2) proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir;
3) proyeksiyası böyük olan mail böyükdür.

Düz xətt və müstəvi arasındakı bucaq

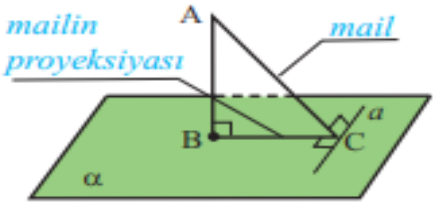
Düz xətlə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyasının əmələ gətirdiyi bucağa düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.



Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq düz xəttin müstəvi üzərindəki digər düz xətlərlə əmələ gətirdiyi bucaqların heç birindən böyük deyildir. Düz xətt müstəviyə perpendikulyar olduqda düz xətt ilə müstəvi arasındakı bucaq 90°-yə bərabər olur.

Mövzu 6
Üç perpendikulyar teoremi. İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar. Perpendikulyar müstəvilər. Paralel müstəvilər.

Teorem. Müstəvi üzərindəki düz xətt müstəviyə çəkilmiş mailin proyeksiyasına perpendikulyardırsa, mailin özünə də perpendikulyardır.



Yəni, α müstəvisi üzərində C nöqtəsindən keçən a düz xətti BC-yə perpendikulyardırsa, AC-yə də perpendikulyardır.
Qısa yazılış: $a \perp BC$ və $BC \perp BA$ olarsa, $a \perp AC$

Bu teoremin tərsi də doğrudur.

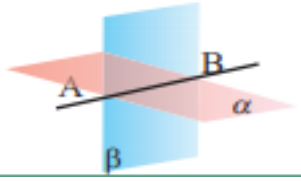
Tərs teorem. Müstəvi üzərindəki düz xətt müstəviyə çəkilmiş mailə perpendikulyardırsa, onun proyeksiyasına da perpendikulyardır.
Yəni, α müstəvisi üzərində C nöqtəsindən keçən a düz xətti AC-yə perpendikulyardırsa, BC-yə də perpendikulyardır.
Qısa yazılış: $a \perp AC$ və $BC \perp BA$ olarsa, $a \perp BC$

İki müstəvi arasındakı bucaq. İkiüzlü bucaqlar

Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri

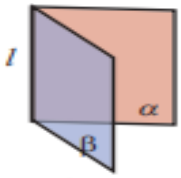
Paralel müstəvilər
Paralel müstəvilərin heç bir ortaq nöqtəsi olmur.

Kəsişən müstəvilər
İki müstəvi bir düz xətt üzrə kəsişir. α və β müstəviləri AB düz xətti üzrə kəsişir.



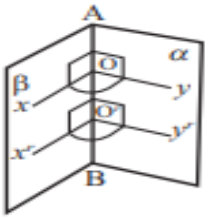
Üst-üstə düşən müstəvilər
İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi vardır.

Ortaq sərhədləri olan iki yarımmüstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura ***ikiüzlü bucaq*** deyilir. Yarımmüstəvilər ikiüzlü bucağın üzləri, onların ortaq sərhədi isə ikiüzlü bucağın tili adlanır.



İki müstəvinin kəsişməsindən 4 ikiüzlü bucaq alınır.

İkiüzlü bucağın tili üzərində hər hansı bir nöqtə götürüb, bu nöqtədən hər iki üzdə tilə perpendikulyar şüalar çəksək, alınan bucaq ikiüzlü bucağın xətti bucağı adlanır.



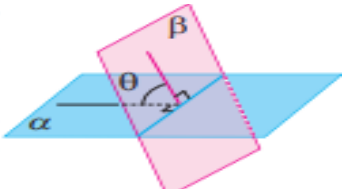
İkiüzlü bucaq özünün xətti bucağı ilə ölçülür. Xətti bucağın dərəcə ölçüsü ikiüzlü bucağın dərəcə ölçüsünü göstərir.

İkiüzlü bucağın bütün xətti bucaqları paralel köçürmə ilə üst-üstə düşür, deməli, dərəcə ölçüləri bərabərdir (eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir).

Xətti bucağın qiyməti onun təpə nöqtəsinin vəziyyətindən asılı deyil.

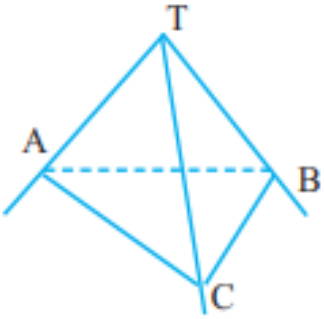
İkiüzlü bucaqların ölçüləri 0°-dən 180°-yə qədər olur.

İki müstəvinin kəsişməsi zamanı alınan ikiüzlü bucaqlar düz bucaq deyilsə, qiymətcə kiçik olanı iki müstəvi arasındakı bucaq qəbul edilir. Şəkildəki α və β müstəviləri arasındakı bucaq dedikdə tərəfləri bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan θ bucağı nəzərdə tutulur.



ABC üçbucağı və onun müstəvisi xaricində T nöqtəsi götürüb, TA, TB, TC şüalarını çəkək.

Ortaq təpəsi T olub, bir müstəvi üzərində yerləşməyən ∠ATC, ∠ATB, və ∠BTC müstəvi bucaqlarının əmələ gətirdiyi fiqura üçüzlü bucaq deyilir. Müstəvi bucaqlara üçüzlü bucağın üzləri, onların tərəflərinə üçüzlü bucağın tilləri, ortaq təpəyə üçüzlü bucağın təpəsi deyilir. Hər bir til eyni zamanda bir ikiüzlü bucağın tilidir.



Teorem 1. Üçüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının cəmi 360°-dən kiçikdir.

Teorem 2. Üçüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı o biri iki müstəvi bucağın cəmindən kiçikdir.

Nümunə 2. Müstəvi bucaqlarının dərəcə ölçüləri:

a) 130°, 100°, 140° ; b) 70°, 80°, 100° olan üçüzlü bucaq varmı?

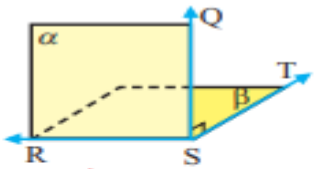
Həlli: a) yoxdur, çünki 130°+100°+140°= 370° > 360°

b) var, çünki 70°+80°+100° < 360° və verilmiş müstəvi bucaqlarının hər biri digər ikisinin cəmindən kiçikdir.

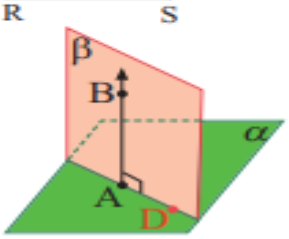
Perpendikulyar müstəvilər

Tərif. İki müstəvinin kəsişməsi ilə alınan ikiüzlü bucaq düz bucaq olarsa, bu müstəvilərə perpendikulyar müstəvilər deyilir.

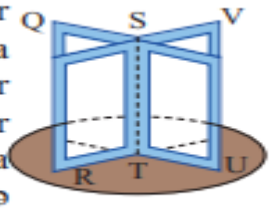
α müstəvisi üzərində SQ ⊥ SR və β müstəvisi üzərində TS ⊥ SR. Üzləri α və β müstəviləri, tili isə RS olan ikiüzlü bucağın ölçüsü ∠QST - xətti bucağın ölçüsü ilə eynidir. ∠QST düz bucaqdırsa, $\alpha \perp \beta$.



Teorem. (müstəvilərin perpendikulyarlıq əlaməti) Müstəvi digər müstəviyə perpendikulyar olan düz xətdən keçirsə, onda bu müstəvilər perpendikulyardır.

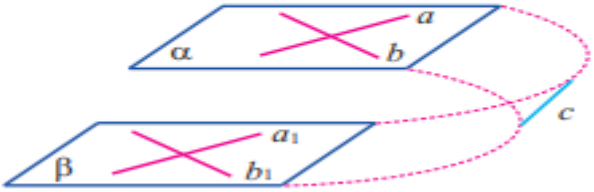


Tətbiqi nümunə. Otellərin, ticarət mərkəzlərinin girişindəki fırlanan qapılar perpendikulyar müstəvilərə nümunə ola bilər. Qapının sxematik təsvirindən görünür ki, ST düz xətti döşəməyə perpendikulyardır və qapı bu düz xətt ətrafında fırlandıqca STU, STR müstəviləri də RTU döşəmə müstəvisinə perpendikulyar olaraq qalırlar.

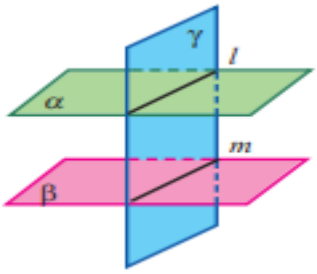


Paralel müstəvilər

Teorem 1. (Müstəvilərin paralellik əlaməti) Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paralel olarsa, bu müstəvilər bir-birinə paraleldir.



Teorem 2. İki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişirsə, onda kəsişmə xətləri paraleldir.
Yəni, paralel α və β müstəvilərini γ müstəvisi kəsərsə, onların l və m kəsişmə xətləri paraleldir.
Qısa yazılış: $\alpha \parallel \beta$ olarsa, γ müstəvisi α və β müstəvisini kəsirsə, $l \parallel m$



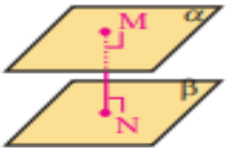
Teorem 3. Paralel düz xətlərin paralel müstəvilər arasında qalan parçaları bərabərdir.

Teorem 4. Eyni müstəviyə perpendikulyar olan iki düz xətt paraleldir.

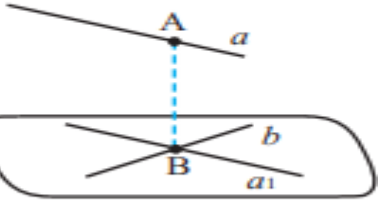
Teorem 5. Eyni düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi paraleldir.

Teorem 6. İki paralel müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt o birinə də perpendikulyardır.

İki paralel müstəvi arasındakı məsafə. İki paralel müstəvi arasındakı məsafə bu müstəvilərdən birinin ixtiyari nöqtəsindən o birinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.

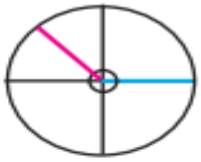


İki çarpaz düz xətt arasındakı məsafə. İki çarpaz düz xəttin hər birindən o birinə paralel müstəvi keçirmək olar. Məsələn, b düz xəttindən a düz xəttinə paralel müstəvi keçirək. Bunun üçün b düz xəttini kəsən və a-ya paralel olan a_1 düz xətti çəkək. a_1 və b kəsişən düz xətlərindən müstəvi keçirsək, bu müstəvi a düz xəttinə paraleldir. a düz xəttinin ixtiyari nöqtəsindən bu müstəviyə qədər məsafə a və b çarpaz düz xətləri arasındakı məsafəyə bərabərdir. $b \cap a_1 = B$ olarsa, α müstəvisinə perpendikulyar olan AB parçası a və b çarpaz düz xətlərinin ortaq perpendikulyarı olur.

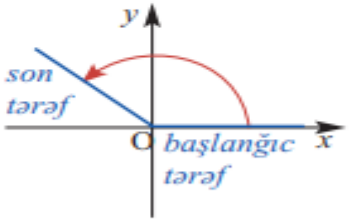


Mövzu 7
Dönmə bucaqları. Bucağın radian və dərəcə ölçüsü. Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi. Xətti sürət. Bucaq sürəti.

Dönmə bucağı



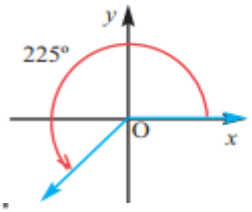
Biz indiyə qədər bucaq dedikdə iki tərpənməz tərəf arasında qalan bucaqlardan danışırdıq. Bucağa dönmənin ölçüsü kimi də baxmaq olar. Məsələn, tərpənməz ox ətrafında fırlanan təkərin başlanğıcda üfüqi vəziyyətdə yerləşən radiusu müəyyən müddətdən sonra əvvəlki vəziyyətlə müəyyən bucaq əmələ gətirəcək. Həm də bu bucağın qiyməti dönmənin hansı istiqamətdə baş verməsindən asılı olacaq. İstənilən bucağa şüanın öz başlanğıc nöqtəsi ətrafında fırlanmasından alınan fiqur kimi baxmaq olar.



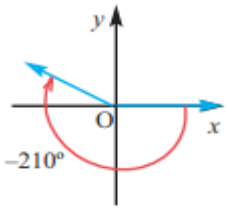
Şüanın başlanğıc vəziyyəti bucağın bir tərəfinə, şüanın son vəziyyəti isə bucağın digər tərəfinə uyğundur. Koordinat müstəvisi üzərində şüanı koordinat başlanğıcına nəzərən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində və ya əks istiqamətdə döndərməklə müxtəlif ölçülü bucaqlar yaratmaq olar.

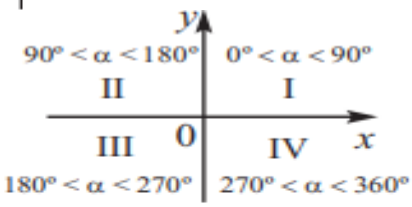
Dönmə bucaqlarının başlanğıc tərəfləri eyni olub, absis oxunun müsbət istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Koordinat başlanğıcına (bucağın təpəsi) nəzərən dönən tərəfi isə son tərəf adlandıraq. Dönmə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində olduqda bucağın ölçüsü müsbət, saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində olduqda isə mənfi qəbul edilir.

müsbət bucaq



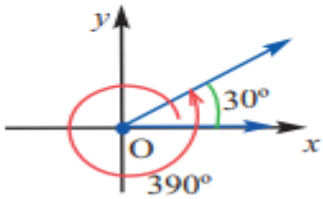
mənfi bucaq





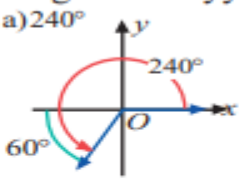
Koordinat oxları koordinat müstəvisini 4 rübə ayırır. Bucağın son tərəfinin hansı rübdə olmasından asılı olaraq onun qiyməti müəyyən intervalda dəyişir.

Son tərəf koordinat başlanğıcına nəzərən bir və ya bir neçə dəfə dönə bilər. Bir tam dönmə ilə 360°-li bucaq yaranır. Başlanğıc və son tərəfləri üst-üstə düşən sonsuz sayda dönmə bucaqları vardır. Məsələn, 30°-li bucaqla 390°-li bucağın son tərəfləri üst-üstə düşür. Ümumiyyətlə, α° və $\alpha^\circ + 360^\circ \cdot n$ (burada n istənilən tam ədəddir) dönmə bucaqlarının son tərəfləri eyni vəziyyətdə olub, üst-üstə düşürlər.



Nümunə 1. Verilən ölçülərdə dönmə bucaqları çəkin, son tərəfinin hansı rübdə olduğunu müəyyən edin.

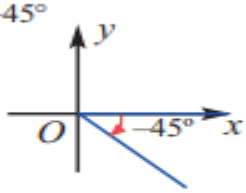
a) 240°



$240° = 180° + 60°$

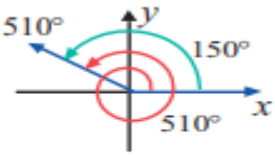
Bucağın işarəsi müsbətdir. Bucağın son tərəfi saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətdə başlanğıc tərəfdən 180° + 60° qədər döndərməklə çəkilir. Son tərəf III rübdədir.

b) –45°



Bucağın işarəsi mənfidir. Bucağın son tərəfi başlanğıc vəziyyətdən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində döndərməklə absis oxunun müsbət istiqaməti ilə 45°-li bucaq əmələ gətirməklə çəkilir. Son tərəf IV rübdədir.

c) 510°

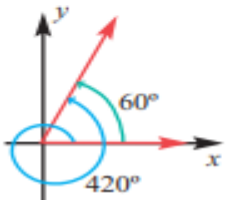


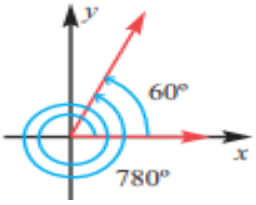
$510° = 360° + 150°$

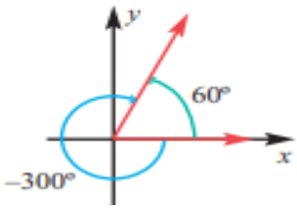
Bucağın son tərəfi başlanğıc tərəfdən saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətində başlanğıc tərəflə 150°-li bucaq əmələ gətirməklə çəkilir. Son tərəf II rübdədir.

Nümunə 2. Koordinat müstəvisində 60°-li bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən iki müsbət, bir mənfi dönmə bucağı göstərin və dərəcə ölçülərini yazın.

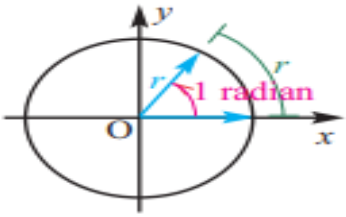
$60° + 360° = 420°$ $\quad$ $60° + 2 \cdot 360° = 780°$ $\quad$ $60° - 360° = -300°$





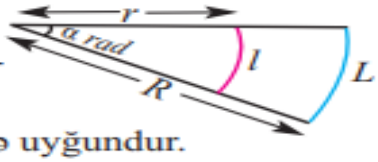


Bucağın radian ölçüsü



Uzunluğu radiusa bərabər olan qövsə uyğun mərkəzi bucağın ölçüsünə **1 radian** deyilir. Qövsün uzunluğunun çevrənin radiusuna nisbəti uyğun mərkəzi bucağın radian ölçüsünü göstərir: $\alpha = \frac{l}{r}$

Bucağın radian ölçüsü radiusun uzunluğundan asılı deyil(şəkildəki fiqurların oxşarlığına görə izah edin).

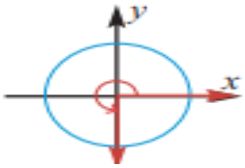


Nümunə 1. Radiusu 4 sm olan çevrənin 12 sm uzunluqda qövsünə uyğun mərkəzi bucağı neçə radiandır?

Həlli: Verilmiş çevrədə 1 radian 4 sm uzunluqda qövsə uyğundur.
12 sm qövsə uyğun bucaq 12 : 4 = 3 radian olar.
Çevrənin uzunluğu $2\pi r$-dir. Radiusa (r) bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 1 radiandırsa, $2\pi r$-ə bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 2π olar. Aşağıda müəyyən dönmələrə uyğun bucaqların radian ölçüləri göstərilib.

tam dönmə:
2π radian

3/4 dönmə:
$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$



1/2 dönmə:
$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$

1/4 dönmə:
$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

Bir tam dönmədə yaranan bucağın radian ölçüsü 2π , dərəcə ölçüsü isə $360°$-dir. Yəni, 2π radian $= 360°$. Buradan radian və dərəcə ölçüləri arasındakı qarşılıqlı əlaqəni müəyyən etmək olar.

Radianın dərəcəyə çevrilməsi:

$$2\pi \text{ radian} = 360°$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

$$1 \text{ radian} \approx 57°$$

Dərəcənin radiana çevrilməsi:

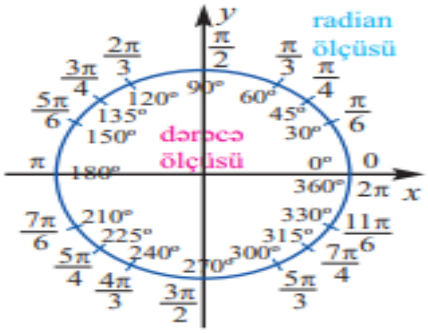
$$2\pi \text{ radian} = 360°$$

$$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175 \text{ radian}$$

Deməli, π rad $= 180°$. Adətən, "rad" işarəsi yazılmır, məsələn, π rad $= 180°$ əvəzinə, $\pi = 180°$ yazılır. Onda aydındır ki,

$$\frac{\pi}{2} = 90°,\ \frac{\pi}{3} = 60°,\ \frac{\pi}{4} = 45°,\ \frac{\pi}{6} = 30°$$



Birinci rübdə yerləşən bəzi bucaqların radian və dərəcə ölçülərinin qarşılıqlı qiymətlərinə görə bu bucaqların misli olan bucaqların radian ölçüsünü tapmaq olar.

Məsələn, $30° = \frac{\pi}{6}$ olduğundan $150° = \frac{5\pi}{6}$ olacaq.

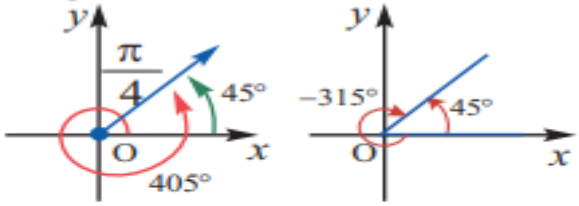
Nümunə 2. Dərəcə ölçüsü ilə verilmiş bucağı radian, radian ölçüsü ilə verilmiş bucağı dərəcə ölçüsü ilə ifadə edin: a) $60°$; b) $\frac{5\pi}{3}$

Həlli: a) $60° = 60 \cdot \frac{\pi}{180}$ radian $= \frac{\pi}{3}$ radian $\approx 1{,}047$ radian

b) $\frac{5\pi}{3}$ radian $= \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 5 \cdot 60° = 300°$

Nümunə 3. Son tərəfi $45°$-li bucaqla üst-üstə düşən bucaqları dərəcə və radianla ifadə edin.

Həlli: $45°$–li bucaqla $405°$–li və $-315°$-li bucağın son tərəfləri üst-üstə düşür.



$405° = 45° + 360°$; $-315° = 45° - 360°$, $45° + 2 \cdot 360°$, $45° - 2 \cdot 360°$; $45° + 3 \cdot 360°$, $45° - 3 \cdot 360°$ bucaqları və ya $45° \pm 360°$, $45° \pm 2 \cdot 360°$, $45 \pm 3 \cdot 360°$ və s. kimi sonsuz sayda bucaqların son tərəfləri $45°$-li bucağın son tərəfi ilə üst-üstə düşür.

Bunu radianla aşağıdakı kimi ifadə etmək olar: $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \pm 4\pi$ və s. ümumi şəkildə isə $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n$ $(n \in N)$ kimi bucaqların son tərəfləri $\frac{\pi}{4}$ radian bucağın son tərəfi ilə üst-üstə düşürlər.

Nümunə. a) $65°$, $90° \le \theta < 720°$

$65°$-li bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını $65° + 360 \cdot n$ və $65° - 360 \cdot n$ $(n \in N)$ düsturlarına görə tapa bilərik.

$n = 1$ $\quad 65° + 360 \cdot 1 = 425°$ $\quad 65° - 360 \cdot 1 = -295°$

$n = 2$ $\quad 65° + 360 \cdot 2 = 785°$ $\quad 65° - 360 \cdot 2 = -655°$

Göründüyü kimi, verilən intervala daxil olan yalnız $425°$–li bucaqdır.

Nümunə. e) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$

Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ və $\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$ $(n \in N)$ düsturlarına görə tapa bilərik.

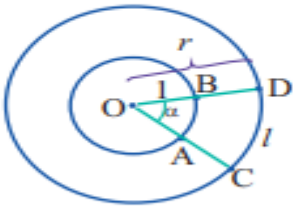
n	1	2	3
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{27\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{21\pi}{4}$

$-4\pi \le \theta < 4\pi$ intervalında $\frac{3\pi}{4}$ bucağı ilə son tərəfi üst-üstə düşən bucaqlar: $\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{13\pi}{4}$

Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi

Qövsün uzunluğu. Radiusu r olan çevrədə m^o-li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğu düsturunu yazaq: $l = \frac{\pi m}{180} \cdot r$.

Qövsün uzunluğunu bucağın radian ölçüsündən istifadə etməklə daha sadə şəkildə yazmaq olar.



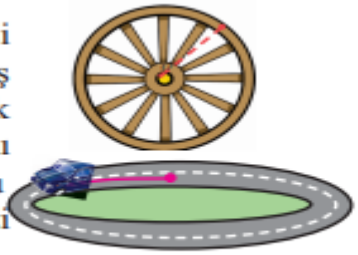
Radianın tərifinə görə $\frac{l}{r} = \alpha$ olduğundan qövsün uzunluğu bucağın radian ölçüsü ilə radiusun hasilinə bərabərdir: $l = \alpha \cdot r$

Qövsün uzunluğu çevrənin radiusu ilə düz mütənasibdir.

Sektorun sahəsi. m^o-li mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsi $S = \frac{\pi m}{360} \cdot r^2$;

m^o-li mərkəzi bucağın radian ölçüsü olduğunu nəzərə alaraq $\frac{\pi m}{180}$ - i α ilə işarə etsək, uyğun sektorun sahə düsturu $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$ olar.

Xətti sürət və bucaq sürəti



Çevrə üzrə hərəkətdə, məsələn, təkərin O nöqtəsi ətrafında fırlanması zamanı onun üzərində götürülmüş hər hansı P nöqtəsinin sürətini iki cür qiymətləndirmək olar. Bunlardan biri nöqtənin təkərin fırlanması zamanı qət etdiyi məsafəyə görə müəyyən edilən sürətdir. Bu xətti sürət adlanır. Digəri isə dönmə bucağına (mərkəzi bucaq) görə olan sürət, yəni bucaq sürəti adlanır.

$$\text{xətti sürət} = \frac{\text{gedilən yol}}{\text{zaman}}$$

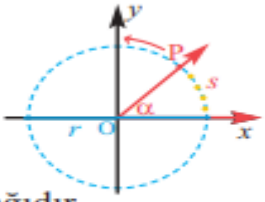
$$v_x = \frac{\alpha r}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, xətti sürət gedilən yolun (uyğun çevrə qövsünün uzunluğunun) zamana olan nisbətinə bərabərdir.

$$\text{bucaq sürəti} = \frac{\text{dönmə bucağı}}{\text{zaman}}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, bucaq sürəti dönmə bucağının zamana olan nisbətinə bərabərdir.



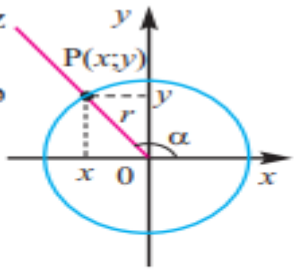
Burada, α (radianla) t zamandakı dönmə (fırlanma) bucağıdır.

Xətti sürətlə bucaq sürəti arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

xətti sürət = $r \cdot$ bucaq sürəti $\qquad v_x = r \cdot \omega$

Mövzu 8
Triqonometrik funksiyalar. Vahid çevrə və istənilən bucağın triqonometrik funksiyaları.

Bucağın triqonometrik nisbətlərinin qiymətləri yalnız bucağın qiymətindən asılıdır.
Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan, r radiuslu çevrə ilə α dönmə bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsi $P(x; y)$ olsun.

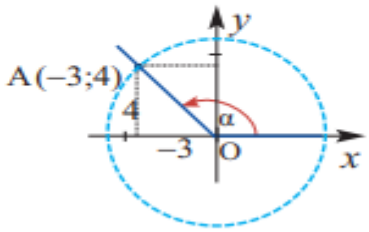


- P nöqtəsinin ordinatının radiusun uzunluğuna nisbətinə α bucağının sinusu deyilir: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$
- P nöqtəsinin absisinin radiusun uzunluğuna nisbətinə α bucağının kosinusu deyilir: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
- P nöqtəsinin ordinatının absisinə nisbətinə α bucağının tangensi deyilir: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (burada $x \neq 0$, yəni P nöqtəsi ordinat oxu üzərində deyil)
- P nöqtəsinin absisinin ordinatına nisbətinə α bucağının kotangensi deyilir: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ (burada $y \neq 0$, yəni P nöqtəsi absis oxu üzərində deyil)
- α bucağının kosekansı bu bucağın sinusunun tərsidir: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y}$ (burada $y \neq 0$)
- α bucağının sekansı bu bucağın kosinusunun tərsidir: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}$ (burada $x \neq 0$)

Nümunə 1. A (– 3; 4) nöqtəsi α dönmə bucağının son tərəfi üzərindədir.
a) Məsələnin şərtini əks etdirən şəkil çəkin.
b) α bucağı üçün triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini müəyyən edin.

Həlli:

a)



b) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

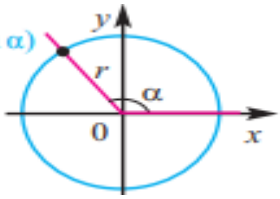
$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$ $\quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$ $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$

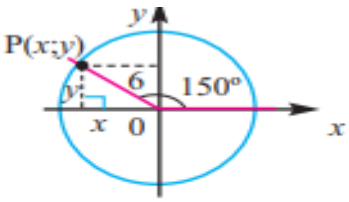
$\sec\alpha = \frac{r}{x} = -\frac{5}{3}$ $\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$

Çevrə üzərindəki nöqtənin koordinatları

Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, r radiuslu çevrə ilə α dönmə bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsi koordinatları ilə $\mathbf{P(r\cos\alpha; r\sin\alpha)}$ kimi yazılır.



Nümunə 2. Şəkildə verilənlərə görə P nöqtəsinin koordinatlarını tapın.
P nöqtəsi II rübdə yerləşir və kosinusu mənfidir.

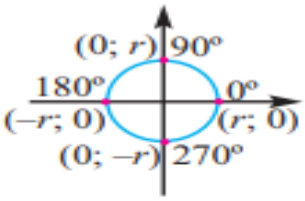


$\cos 150° = \frac{x}{r}$ $\quad \sin 150° = \frac{y}{r}$

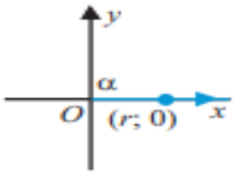
$-\cos 30° = \frac{x}{6}$ $\quad \sin 30° = \frac{y}{6}$

$x = -6\cos 30° = -3\sqrt{3}$ $\quad y = 6\sin 30° = 3$

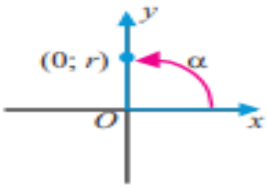
Bəzən bucağın son tərəfi koordinat oxlarından birinin üzərində yerləşir. Bu halda yaranan dönmə bucaqlarının ölçüsü $\varphi = 0^\circ$ və ya $\varphi = 0$ radian, $\varphi = 90^\circ$ və ya $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radian, $\varphi = 180^\circ$ və ya $\varphi = \pi$ radian, $\varphi = 270^\circ$ və ya $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ radian kimi ola bilər. Bu halda x və y koordinatları ya sıfır, ya da mütləq qiymətcə çevrənin radiusuna bərabər olur.



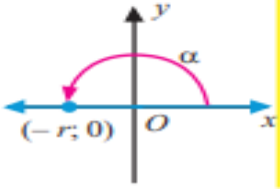
$\alpha = 0^\circ$ və ya 0 radian



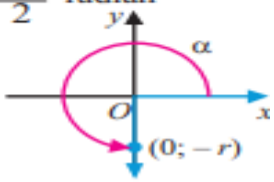
$\alpha = 90^\circ$ və ya $\frac{\pi}{2}$ radian



$\alpha = 180^\circ$ və ya π radian

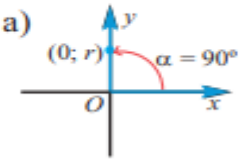


$\alpha = 270^\circ$ və ya $\frac{3\pi}{2}$ radian



Nümunə 3. a) $\alpha = 90^\circ$; b) $\alpha = 180^\circ$; c) $\alpha = 270^\circ$ olduqda triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini tapın.

a)



$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$

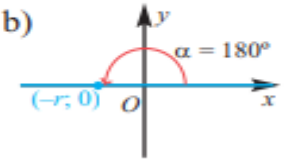
$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$\text{tg } 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{r}{0}$

təyin edilməyib.

$\text{ctg } 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{r} = 0$

b)



$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$

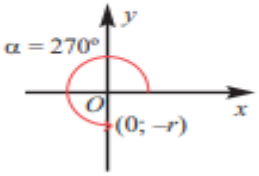
$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

$\text{tg } 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$

$\text{ctg } 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-r}{0}$

təyin edilməyib.

c)



$\sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

$\cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$\text{tg } 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-r}{0}$

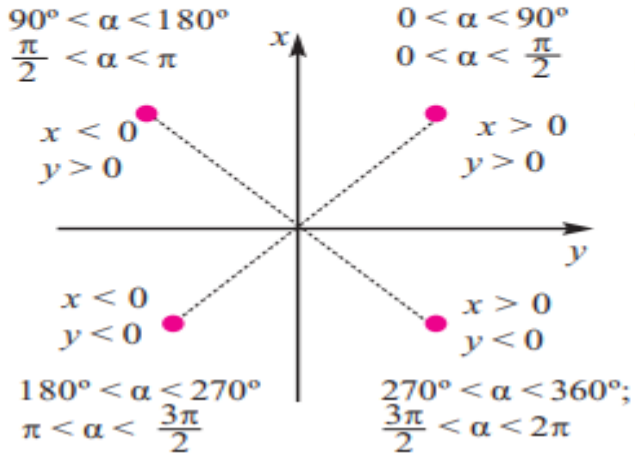
təyin edilməyib.

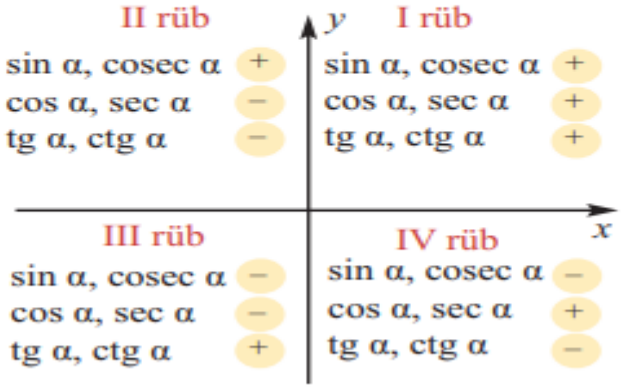
$\text{ctg } 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-r} = 0$

α-nın mümkün olan hər bir qiymətinə $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$-nın yeganə qiyməti uyğundur. Buna görə bu triqonometrik nisbətlər α bucağının funksiyalarıdır. Onları triqonometrik funksiyalar adlandırırlar.

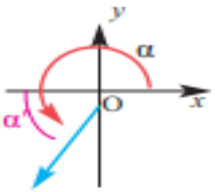
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ olduğundan kosinusun işarəsi x-in işarəsi ilə,

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ olduğundan sinusun işarəsi y-in işarəsi ilə üst-üstə düşür.

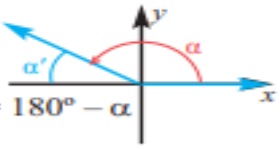




90°-dən böyük bucaqlara uyğun triqonometrik nisbətləri hesablamaq üçün onlara uyğun iti bucaqların triqonometrik nisbətlərindən istifadə etmək əlverişlidir. İstənilən α bucağına uyğun iti bucaq α bucağının son tərəfinin absis oxu ilə üst-üstə düşən düz xətlə əmələ gətirdiyi α′ iti bucağıdır.

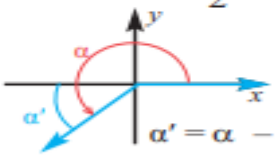


$90^\circ < \alpha < 180^\circ$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



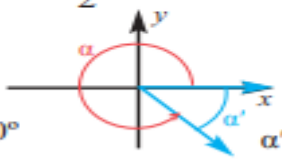
$\alpha' = 180^\circ - \alpha$

$180^\circ < \alpha < 270^\circ$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$



$\alpha' = \alpha - 180^\circ$

$270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



$\alpha' = 360^\circ - \alpha$

Uyğun iti bucaqdan istifadə etməklə istənilən bucağın triqonometrik nisbətlərini müəyyən etmək olar. Bu qiymətlər 30°, 45°, 60° bucaqlarına görə dəqiq tapıla bilir, iti bucaqların qalan bütün qiymətlərində isə kalkulyatorun köməyilə təqribi olaraq hesablanır.

Nümunə 1. Verilən bucaqlara uyğun iti bucaqları müəyyən edin.

a) $\alpha = 300^\circ$ b) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

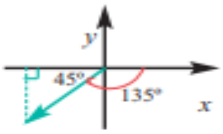
Həlli: a) 300°-li bucağın son tərəfi IV rübdə yerləşir. Uyğun iti bucaq:

$$360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

b) $\frac{7\pi}{6}$ - li bucağın son tərəfi III rübdə yerləşir. Uyğun iti bucaq:

$$\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$

Nümunə 2. $\alpha = -135^\circ$-li bucağın əsas triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini hesablayın. Həll addımları:



1. Son tərəfi verilən bucaqla üst-üstə düşən və onu 360°-yə tamamlayan ən kiçik müsbət bucaq tapılır: $-135^\circ + 360^\circ = 225^\circ$
2. 225°-yə uyğun iti bucaq tapılır: $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$.
3. Verilən bucağın rübü müəyyən edilir: –135°-li bucaq III rübün bucağıdır.
4. 45°-li bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətləri və verilmiş bucağın triqonometrik funksiyalarının III rübdəki işarələri nəzərə alınır:

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

İstənilən bucağın triqonometrik funksiyalarını aşağıdakı kimi müəyyən etmək olar:

- uyğun iti bucağı müəyyən edin;
- iti bucağa uyğun triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın;
- bucağın hansı rübdə yerləşdiyinə görə triqonometrik funksiyaların işarəsini müəyyən edin.

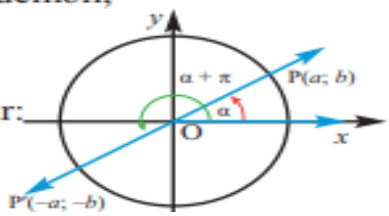
Bucaq tam sayda dövrlər qədər dəyişdikdə triqonometrik funksiyaların qiymətləri dəyişmir.

Hər hansı α $(0° \le \alpha < 360°)$ bucağının triqonometrik funksiyalarının qiyməti son tərəfləri α bucağı ilə üst-üstə düşən $\alpha + 360°\cdot k$ $(k \in Z)$ bucaqlarının triqonometrik funksiyalarının qiyməti ilə eynidir.

$$\sin(\alpha + 360°\cdot k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 360°\cdot k) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$$

Qeyd edək ki, bucaq tam dövrün yarısı qədər dəyişdikdə də tangens və kotangensin qiymətləri dəyişmir. Doğrudan da, α dönmə bucağına uyğun nöqtə $P(a; b)$ olarsa, $\alpha + 180°$ (və ya $\alpha + \pi$) dönmə bucağına uyğun nöqtə $P'(-a; -b)$ olduğundan $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, deməli,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$$



Ümumi halda $(k \in Z)$ aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 180°\cdot k) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + 180°\cdot k) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha$$

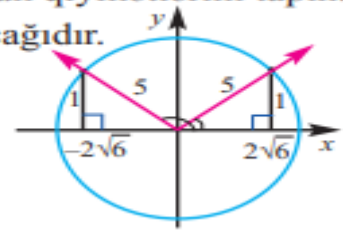
Nümunə 3. $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ olduğuna görə $\cos\alpha$ -nın mümkün qiymətlərini tapın.

Sinus müsbət olduğundan bucaq ya I, ya da II rübün bucağıdır.

$\sin\alpha = \frac{1}{5}$, deməli, $r = 5$ olarsa, $y = 1$.

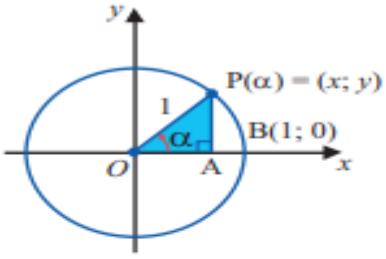
Uyğun nöqtənin absisi $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$.

Onda $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ və ya $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.



Vahid çevrə və triqonometrik funksiyalar

Triqonometrik funksiyaların qiymətləri yalnız α bucağının qiymətindən asılı olub, çevrənin radiusundan asılı deyil. Ona görə də ümumiliyi pozmadan $R = 1$ qəbul edə bilərik. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 1-ə bərabər olan çevrəyə vahid çevrə deyilir. Vahid çevrənin üzərindəki nöqtələrin koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ tənliyini ödəyir.



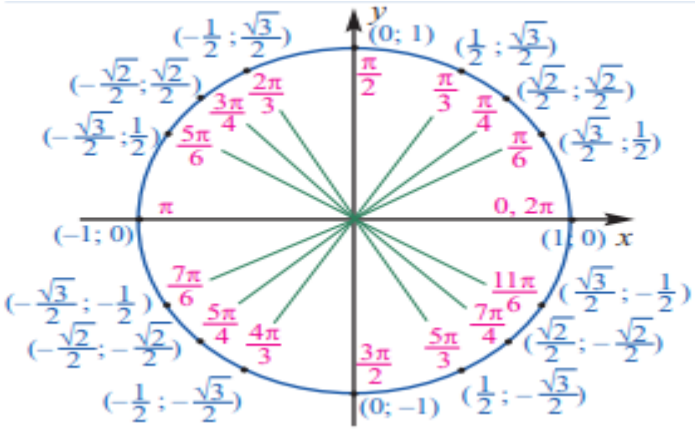
$P(\alpha) = (x; y)$ nöqtəsi α bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişdiyi nöqtə olarsa, triqonometrik funksiyalarla nöqtənin koordinatları arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

Deməli, vahid çevrə üzərində α dönmə bucağına uyğun nöqtəni koordinatları ilə $P(\alpha) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ kimi yazmaq olar.

Həmçinin verilən koordinatlara görə $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ və $\operatorname{cosec}\alpha$ kimi triqonometrik funksiyaları tapmaq olar.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$$



Vahid çevrə üzərində istənilən nöqtənin koordinatları

$-1 \le x \le 1 \qquad -1 \le y \le 1$

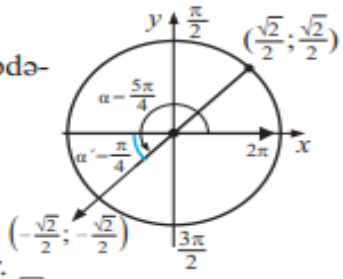
şərtini ödədiyindən alırıq ki:

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

$-1 \le \sin\alpha \le 1$

Yəni, $\sin\alpha$ və $\cos\alpha$ -nın ən böyük qiyməti 1-ə, ən kiçik qiyməti –1-ə bərabərdir.

Nümunə 1. $\frac{5\pi}{4}$ dönmə bucağı üçün əsas triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.



Həlli: $\frac{5\pi}{4}$ radiana uyğun dönmədə bucağın tərəfi III rübdədir. Bu bucağa uyğun iti bucaq $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ olar.

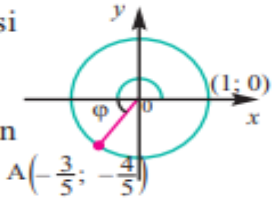
$\frac{5\pi}{4}$ bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişmə nöqtəsi $\frac{\pi}{4}$ bucağına uyğun olan $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ nöqtəsi ilə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

Deməli, $\frac{5\pi}{4}$ bucağının son tərəfi vahid çevrəni $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ nöqtəsində kəsir. Buradan, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = 1$

Nümunə 2. Absisi $-\frac{3}{5}$ olan və III rübdə yerləşən A nöqtəsi vahid çevrə ilə φ bucağının tərəfinin kəsişmə nöqtəsidir.

a) A nöqtəsinin ordinatını tapın.

b) Məsələnin şərtini əks etdirən şəkil çəkin və φ bucağı üçün altı triqonometrik funksiyanın qiymətini müəyyən edin.



Həlli: a) $(-\frac{3}{5})^2 + y^2 = 1$, $\quad y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, $y = \pm\frac{4}{5}$.

Nöqtə III rübdə yerləşdiyi üçün $y = -\frac{4}{5}$

b) $\sin\varphi = -\frac{4}{5} \qquad \cos\varphi = -\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3} \qquad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{3}{4} \qquad \sec\varphi = -\frac{5}{3} \qquad \operatorname{cosec}\varphi = -\frac{5}{4}$

Nümunə 3. $3 + 2\sin\alpha$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ *hər iki tərəfi 2-yə vuraq*

$-2 \le 2\sin\alpha \le 2$ *hər iki tərəfə 3 əlavə edək*

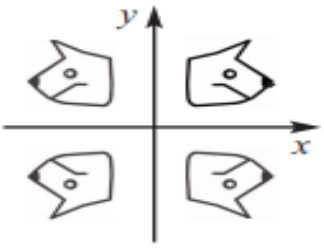
$-2 + 3 \le 3 + 2\sin\alpha \le 2 + 3 \qquad 1 \le 3 + 2\sin\alpha \le 5$

Deməli, $3 + 2\sin\alpha$ ifadəsinin ƏKQ-i 1-ə, ƏBQ-i 5-ə bərabərdir.

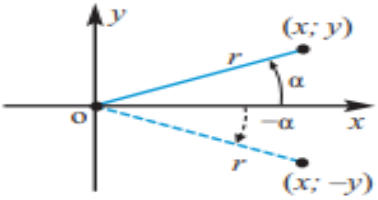
Mövzu 9

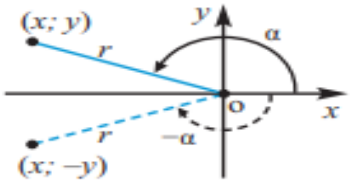
Çevirmə düsturları. Triqonometrik eyniliklər.

Koordinat müstəvisi üzərində I rübdəki obyektin y oxuna nəzərən əksetməsi ilə obyekt II rübdə yerləşir. II rübdə yerləşən obyektin x oxuna nəzərən əksetməsi ilə bu obyekt III rübdə yerləşdirilir. Bu isə I rübdəki ilkin obyektin koordinat başlanğıcına nəzərən əksetməsi ilə üst-üstə düşür. Həmçinin diqqət edin ki, y oxuna nəzərən əksetmə x oxuna nəzərən əksetmənin 180° dönməsi ilə üst-üstə düşür.



x oxuna nəzərən bucağın son tərəfinin əksetməsi ilə onun üzərindəki nöqtələrin koordinatları şəkildə göstərildiyi kimi dəyişir. Yəni, x oxuna əksetmə zamanı yalnız y koordinatının işarəsi dəyişir.





Deməli, kosinus x koordinatından asılı olduğundan dəyişmir, sinus isə işarəsini dəyişir. Beləliklə, α və $-\alpha$ bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimi olur:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Yəni, **sinus, tangens, kotangens funksiyaları tək, kosinus isə cüt funksiyadır.**

Nümunə 1. $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\qquad \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

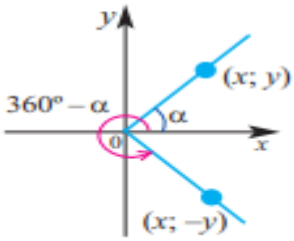
$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$ $\qquad \operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$

α və $360^\circ - \alpha$ dönmə bucaqlarının son tərəfləri x oxuna nəzərən simmetrikdir: $(x; y) \to (x; -y)$.

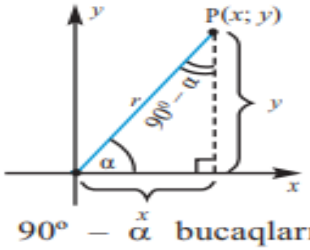
Buradan alırıq:

$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$



İti bucağı α olan düzbucaqlı üçbucaqda α və 90° – α iti bucaqları üçün triqonometrik nisbətləri yazaq:



$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\qquad$ $\sin(90^\circ - \alpha = \frac{x}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$

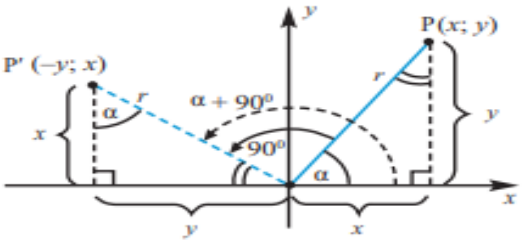
Bərabərliklərin cüt-cüt müqayisəsinə görə α və 90° – α bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimidir:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

α dönmə bucağının son tərəfini daha 90° döndərək. Bu zaman onun üzərində olan P(x; y) nöqtəsi P′(–y; x) nöqtəsinə çevrilir.

Triqonometrik funksiyaların tərifinə görə:



$\sin(\alpha + 90^\circ) = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$

$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha,$

$\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$

Bu düsturları aşağıdakı şəkildə yazaq:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

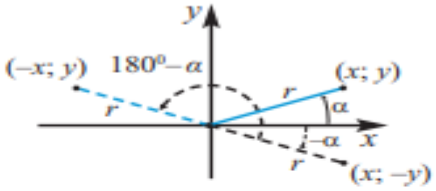
$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Bu düsturları aşağıdakı şəkildə yazaq:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

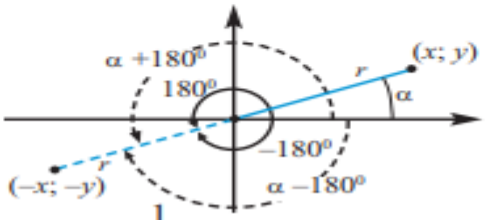
Şəkildən göründüyü kimi, y oxuna nəzərən əksetmə x oxuna nəzərən əksetmənin 180° dönməsinə ekvivalentdir. Koordinatların dəyişməsini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:



$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Şəkildən göründüyü kimi, α bucağının son tərəfi 180° döndükdə əks qütbdə olmaqla eyni düz xətt üzərində yerləşir.



$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

Nümunə 2. $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$270° + \alpha$ dönmə bucağının triqonometrik funksiyaları üçün də oxşar düsturları almaq üçün $270° + \alpha = 90° + (180° + \alpha)$ şəklində yazıb, uyğun düsturları ardıcıl tətbiq etmək kifayətdir. Məsələn:

$\sin(270° + \alpha) = \sin(90° + (180° + \alpha)) = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

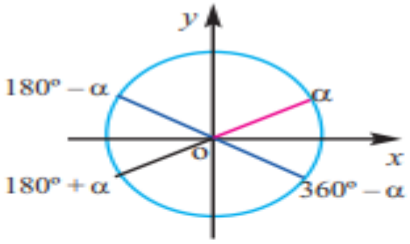
$\cos(270° + \alpha) = \cos(90° + (180° + \alpha)) = -\sin(180° + \alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

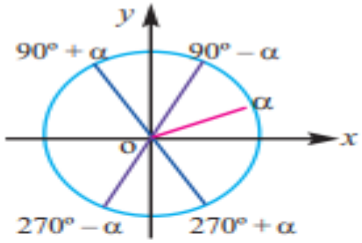
İndi isə $270° - \alpha$ dönmə bucaqları üçün uyğun düsturları yazaq. Məsələn:

$\sin(270° - \alpha) = \sin(270° + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(270° - \alpha) = \cos(270° + (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Aldığımız düsturların köməyi ilə istənilən bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərinin tapılmasını iti bucağın triqonometrik funksiyasının tapılmasına gətirmək olar. Bu düsturlara çevirmə düsturları deyilir. Çevirmə düsturları üçün müəyyən qanunauyğunluğun olduğunu asanlıqla izləmək olar.





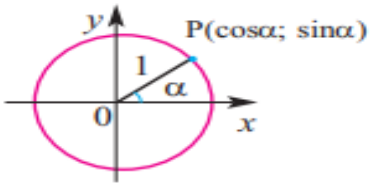
1) Arqument $90° \pm \alpha$ və ya $270° \pm \alpha$ şəklindədirsə, onda bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin "qoşma" triqonometrik funksiyasına çevrilir (yəni sinus kosinusa və tərsinə, tangens kotangensə və tərsinə).

2) Əgər arqument $180° \pm \alpha$, $360° \pm \alpha$ olarsa, bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin eyni adlı funksiyasına çevrilir.

Hər iki halda alınan funksiyanın işarəsi α bucağını iti bucaq qəbul etməklə çevrilən funksiyanın verilən rübdəki işarəsi ilə eyni olur.

Eyni bucağın triqonometrik funksiyaları arasındakı münasibətlər

İstənilən α bucağı üçün $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ eyniliyinin doğruluğunu vahid çevrə üzərində götürülmüş nöqtələrin koordinatlarına görə izah etmək olar.



$x^2 + y^2 = 1$ *Vahid radiuslu çevrənin tənliyi*

$\mathbf{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ *vahid çevrə üzərindəki nöqtə üçün x=cosα və y=sinα olduğuna görə*

Vahid çevrə üzərindəki nöqtənin koordinatlarına və triqonometrik funksiyaların tərifinə görə alarıq:

$\cos\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\mathbf{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\sin\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\mathbf{ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

Bu bərabərliklərdən alırıq ki, eyni zamanda $\cos\alpha \neq 0$ və $\sin\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən α bucaqları üçün $\mathbf{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1}$ eyniliyi doğrudur.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bərabərliyinin hər iki tərəfini növbə ilə $\cos^2\alpha$-ya ($\cos\alpha \neq 0$) və $\sin^2\alpha$-ya ($\sin\alpha \neq 0$) bölsək, alarıq:

$$\mathbf{1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}, \qquad \mathbf{1 + ctg^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Eyni bucağın triqonometrik funksiyaları üçün yuxarıda aldığımız münasibətlərə əsas triqonometrik eyniliklər deyilir.

Əsas triqonometrik eyniliklərə görə yaza bilərik:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \end{cases}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1 \;\begin{cases} tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha} \\ ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \end{cases}$$

Nümunə 1. Əsas triqonometrik eyniliklərdən istifadə etməklə isbat edin:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{2}{\cos x}$$

İsbatı:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{(1+\sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)} =$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + 1}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{2 + 2\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{2(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{2}{\cos x}$$

Nümunə 2. $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ və β bucağı III rüb bucağı olduğuna görə digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini hesablayın.

Həlli: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ düsturundan alırıq ki: $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$

β III rübün bucağı olduğundan $\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = -\frac{3}{5}$

Onda $tg\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ və $ctg\,\beta = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{3}{4}$

Mövzu 10

Toplama düsturları. Toplama düsturlarından alınan nəticələr. Triqonometrik ifadələrin sadələşdirilməsi.

İki bucağın cəmi və fərqinin triqonometrik funksiyaları

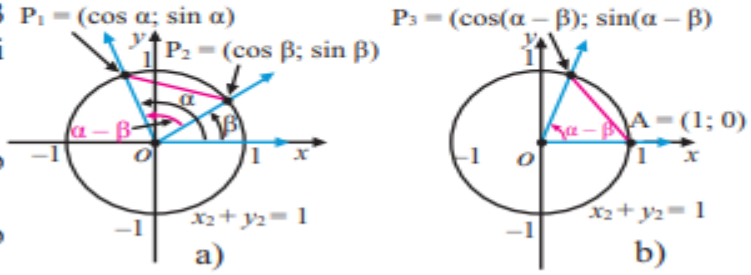
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ **$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$**

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ **$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$**

► Əvvəlcə $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ eyniliyini isbat edək.

a) şəklində göstərilən α və β bucaqlarının son tərəfləri vahid çevrəni, uyğun olaraq P_1 $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ və P_2 $(\cos\beta; \sin\beta)$ nöqtələrində kəsir.

$\alpha-\beta$ bucağını b) şəklində olduğu kimi yerləşdirək.



$\alpha-\beta$ bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişmə nöqtəsi P_3 $(\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$ olsun.

$\Delta P_1OP_2 \cong \Delta P_3OA$ (TBT əlamətinə görə) olduğundan $P_1P_2 \cong P_3A$.

$P_1P_2 = \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2}$ *iki nöqtə arasında məsafə düsturu*

$P_3A = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2}$

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2$ *bərabərliyin xassəsi*

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$

$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta)$ *müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi*

$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) =$

$= (\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1$ *toplama əməlinin xassələrinin və triqonometrik eyniliklərin tətbiqi*

$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$

$2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2\cos(\alpha-\beta)$ *bərabərliyin xassəsi*

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ *eyniliyin doğruluğu isbat edildi.* ■

► $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ eyniliyinin isbatı

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ olduğunu nəzərə alaq

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ *eyniliyinin doğruluğu isbat edildi* ■

► $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ eyniliyinin isbatı

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) =$

çevirmə düsturuna görə *qruplaşdırma*

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

fərqin kosinusu düsturuna görə *çevirmə düsturlarını nəzərə almaqla*

► $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ eyniliyinin isbatı:

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

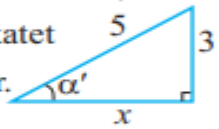
Nümunə 1. $\cos\frac{7\pi}{12}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Həlli: $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

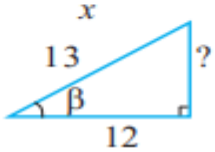
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Nümunə 2. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ və $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ olduqda $\sin(\alpha - \beta)$-nın qiymətini tapın.

Həlli: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. α-ya uyğun iti bucaq α' olarsa, $\sin\alpha' = \frac{3}{5}$. Qarşıdakı katet 3, hipotenuz isə 5 olduqda, bitişik katet $x = \sqrt{25 - 9} = 4$ və α III rüb bucağı olduğundan $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ olur.



$\cos\beta = \frac{12}{13}$ olduğundan analoji qayda ilə $\sin\beta = \frac{5}{13}$ alarıq.



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = -\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$$

Tangens və kotangens üçün də toplama düsturlarını yazmaq olar:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \underbrace{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}}_{\text{tərifə görə}} = \underbrace{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}}_{\text{toplama düsturlarına görə}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}}_{\text{surət və məxrəci } \cos\alpha\cdot\cos\beta \text{ hasilinə bölməklə}} = \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}_{\text{sadələşdirmə}}$$

Deməli:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Oxşar qayda ilə göstərin ki: $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$

Cəmin (fərqin) hasilə çevrilməsi

$\begin{matrix}\alpha = x + y \\ \beta = x - y\end{matrix}$ olarsa, $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$

$\sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y$. Deməli,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Oxşar qayda ilə alırıq:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Hasili cəmə çevirmə düsturları

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

İkiqat arqumentin triqonometrik funksiyaları

Toplama düsturları $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ifadələrini α bucağının triqonometrik funksiyası ilə ifadə etməyə imkan verir.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Beləliklə, ikiqat bucağın düsturları adlanan eynilikləri alırıq:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Yarım arqumentin düsturları

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Buradan:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Bu düsturlarda α-nın əvəzinə $\frac{\alpha}{2}$ yazmaqla alarıq:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Yarımqat bucaqlar üçün triqonometrik eyniliklər:

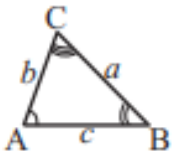
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Mövzu 11

Sinuslar teoremi. Kosinuslar teoremi.

Sinuslar teoremi

İstənilən ΔABC-də a, b, c tərəfləri uyğun olaraq, ∠A, ∠B, ∠C-nin qarşısında duran tərəflər olarsa:



$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$$

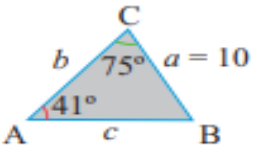
Üçbucağın tərəfləri onun qarşı bucaqlarının sinusları ilə mütənasibdir.

Nəticə. 1) Üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısında duran tərəflərin uzunluqları bərabərdir.

2) Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf və böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur.

Üçbucağın iki bucağı və bir tərəfi verildikdə, iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verildikdə sinuslar teoremini tətbiq edərək qalan tərəfləri və bucaqları tapmaq mümkündür.

I hal. Üçbucağın iki bucağı və bir tərəfi verilir.



Nümunə 1. ΔABC-də $a = 10$, $\angle A = 41°$, $\angle C = 75°$

Həlli: Üçbucağın daxili bucaqlarınınn cəminin 180° olduğunu bilərək, verilən iki bucağına görə üçüncü bucağını, sinuslar teoreminə görə isə verilməyən iki tərəfini tapa bilərik.

$$\angle B = 180 - (\angle A + \angle C) = 180 - (41° + 75°) = 64°$$

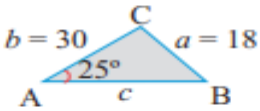
$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B} \Rightarrow b=\frac{a\sin\angle B}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin 64°}{\sin 41°} \approx \frac{10\cdot 0{,}899}{0{,}656} \approx 13{,}7$$

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C} \Rightarrow c=\frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin 75°}{\sin 41°} \approx \frac{10\cdot 0{,}966}{0{,}656} \approx 14{,}7$$

II hal. Üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verilir.

Nümunə 2. 1) ΔABC-də $a = 18$, $\angle A = 25°$, $b = 30$

Həlli: $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}$



$$\sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a} = \frac{30\sin 25°}{18} \approx 0{,}7044$$

0,7044 ədədini kalkulyatora daxil edib $\boxed{\sin^{-1}}$ düyməsini işarələsək, B bucağının 44,8° olduğunu görərik: $\angle B \approx 44{,}8°$

Lakin $\sin\angle B = \sin(180 - \angle B)$ olduğundan, burada B bucağının ikinci bir qiyməti də var: $\angle B \approx 180° - 44{,}8° = 135{,}2°$

$\boxed{\angle B \approx 44{,}8°}$ olduqda

$\angle C \approx 180° - (25° + 44{,}8°) = 110{,}2°$

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c=\frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

$$c \approx \frac{18\sin 110{,}2°}{\sin 25°} \approx \frac{18\cdot 0{,}938}{0{,}423} \approx 40$$

$\boxed{\angle B \approx 135{,}2°}$ olduqda

$\angle C \approx 180° - (25° + 135{,}2°) = 19{,}8°$

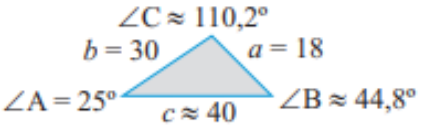
$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c=\frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

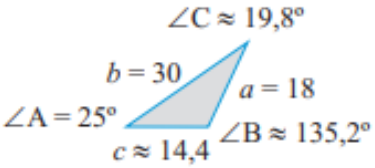
$$c \approx \frac{18\sin 19{,}8°}{\sin 25°} \approx \frac{18\cdot 0{,}938}{0{,}423} \approx 14{,}4$$

Deməli, verilən qiymətlərə uyğun iki üçbucaq var.

1. $\angle B \approx 44{,}8°$, $\angle C \approx 110{,}2°$, $c \approx 40$



2. $\angle B \approx 135{,}2°$, $\angle C \approx 19{,}8°$, $c \approx 14{,}4$



II hal üçün aşağıdakı vəziyyəti də nəzərdən keçirək.

1) $\triangle ABC$-də $a = 5$, $\angle A = 30°$, $b = 12$ olarsa, sinuslar teoreminə görə

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B}, \quad \sin\angle B = \frac{b\sin\angle A}{a} = \frac{12\cdot\sin 30°}{5} = 1{,}2 \text{ alarıq.}$$

İstənilən bucaq üçün $\sin\angle B \le 1$ olduğundan, $\sin\angle B = 1{,}2$ ola bilməz.

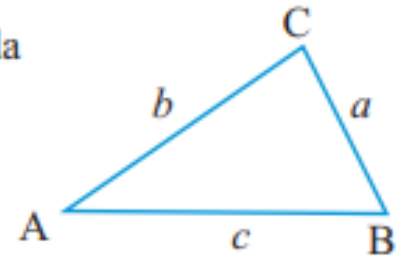
Kosinuslar teoremi

Tərəfləri a, b və c olan istənilən ABC üçbucağında

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$



Üçbucağın hər hansı tərəfinin kvadratı bərabərdir: qalan iki tərəfin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərlə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinin iki misli.

Nümunə 1. İki tərəfi və onlar arasında qalan bucağına görə üçbucağın həlli.
ΔABC-də $a = 12$ sm, $c = 16$ sm, $\angle B = 38°$ olduğuna görə üçbucağı həll edin.

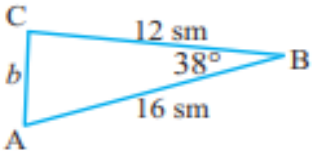
Həlli:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$ ***Kosinuslar teoremi***

$b^2 = 144 + 256 - 2\cdot 12\cdot 16\cdot\cos 38°$ ***a, c və ∠B-nin qiymətləri yerinə yazılır***

$b^2 \approx 400 - 384\cdot 0{,}788 \approx 97{,}4$ ***Sadələşdirilir***

$b \approx \sqrt{97{,}4} \approx 9{,}87$ (sm) ***Kvadrat kök alınır***



Mövzu 12

Dövri funksiyalar. *y=sinx* və *y=cosx* funksiyalarının qrafiki.

Dövri funksiyalar

Təbiətdə bir çox hadisələr – günəşin doğması və batması, kometlərin görünməsi, mövsümi olaraq temperaturun dəyişməsi, okeanda dalğaların qabarması və çəkilməsi və s. kimi təbiət hadisələri periodik olaraq təkrarlanır. Həmçinin istehsal sahələrindəki cihazların işini, avtomobillərin hissələrinin hərəkətini dövri funksiyalarla modelləşdirmək olar.

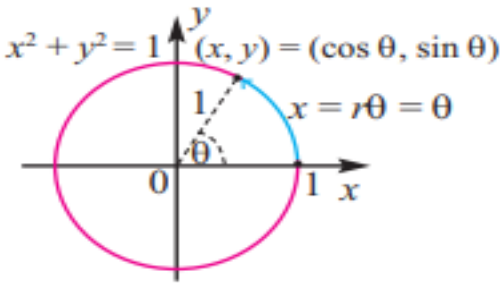
Tutaq ki, elə $T \neq 0$ ədədi var ki, funksiyanın təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $x \pm T$ də təyin oblastına daxildir və $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ ödənir. Onda $f(x)$ funksiyasına dövrü T olan dövri funksiya deyilir. T dövrdürsə, onda $n \cdot T$ də ($n \in Z$) dövrdür.
Doğrudan da, məsələn, $f(x \pm 2T) = f((x \pm T) \pm T) = f((x \pm T) = f(x)$
Funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünə onun əsas dövrü deyilir.

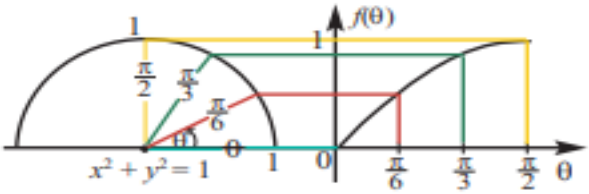
Triqonometrik funksiyaların dövriliyi

Son tərəfləri üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını nəzərdən keçirərkən onların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərinin eyni olduğunu gördük.
Məsələn, x-in bütün qiymətləri üçün $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Deməli, triqonometrik funksiyanın qiymətləri təkrarlanır. Sinus və kosinus funksiyalarının qiymətləri 2π, tangens funksiyasının qiymətləri isə π periodu ilə təkrarlanır. x ədədi arqumentinin triqonometrik funksiyası x radian bucağının eyniadlı triqonometrik funksiyasına deyilir. Bucağın triqonometrik funksiyalarının bütün xassələri (tək-cütlüyü, dövriliyi və s.) ədədi arqumentin triqonometrik funksiyası üçün də eynidir. Bu funksiyaların qrafikini uzunluğu dövrə bərabər olan parçada qurub, bu hissəni təkrarlamaq kifayətdir.

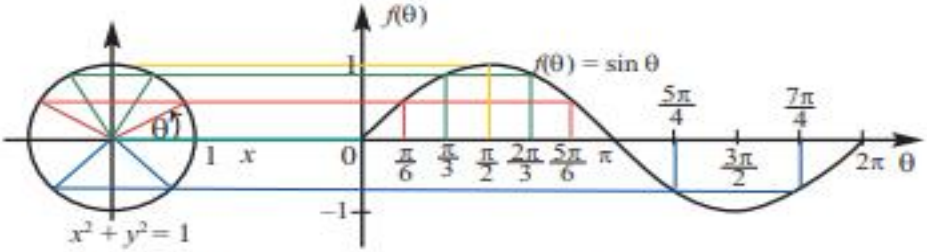
$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki

$f(\theta) = \sin\theta$ dövri funksiyası çevrə üzrə hərəkətdə θ bucağı qədər dönmədə nöqtənin x oxundan hündürlüyünü (şaquli məsafəni) göstərir. Vahid çevrə üzərində hər bir nöqtənin koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ tənliyini ödəməklə $(x; y) = (\cos\theta; \sin\theta)$ kimidir. Burada θ bucağı vahid radiusun x oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Deməli, $(x; y)$ nöqtəsi çevrə üzrə dəyişir və onun y koordinatını $\sin\theta$ təyin edir. Nöqtənin çevrə qövsü boyu hərəkəti ilə $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qiymətləri arasında birqiymətli asılılıq vardır. Vahid çevrənin I rübdə yerləşən qövsünü üç bərabər qövsə ayıraq və bölgü nöqtələrindən $(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ absis oxuna paralel düz xətlər keçirib, bu xətlərin uyğun olaraq $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtələrini qeyd edib, uyğun nöqtələri birləşdirsək, şəkildəki qrafiki alarıq.

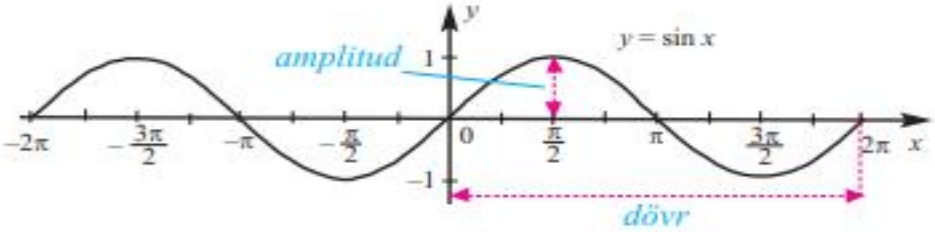




Vahid çevrə boyu tam dönmənin 360° və ya 2π radian olduğu məlumdur. $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ aralığında analoji qayda ilə quraq:



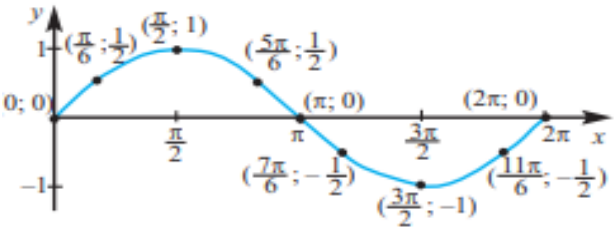
Sinus dövri funksiya olduğundan uzunluğu 2π olan aralıqlarda $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafiki eyni ilə təkrarlanır. Arqument üçün x, funksiya üçün y işarələməsindən istifadə etməklə funksiyanı $y = \sin x$ şəklində yazaq. $y = \sin x$ funksiyasının $[-2\pi; 2\pi]$ aralığında qrafiki aşağıdakı kimi olacaq:

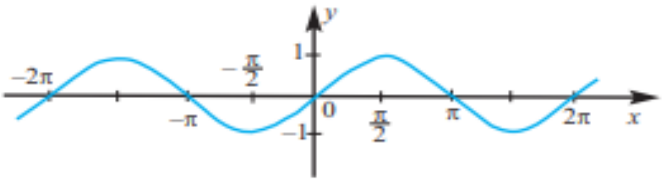


$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki (amplitudu 1, dövrü 2π olan) sinusoid adlanır.

$y = \sin x$ funksiyasının qrafikini qiymətlər cədvəlinin köməyi ilə də qurmaq olar. Sinus dövri funksiya olduğundan qrafikini uzunluğu 2π olan $[0; 2\pi]$ parçasında qurmaq kifayətdir. Cədvəldəki nöqtələri koordinat müstəvisi üzərində yerləşdirək və səlis əyri ilə birləşdirək. Alınan qrafik $y = \sin x$ funksiyasının qrafikidir və sinusoid adlanır.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$(x; y)$	$(0; 0)$	$(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2})$	$(\pi; 0)$	$(\frac{7\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$	$(\frac{11\pi}{6}; -\frac{1}{2})$	$(2\pi; 0)$





Qiymətlər cədvəli, həmçinin qrafik göstərir ki, $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcından – (0; 0) nöqtəsindən keçir. x-in qiyməti 0-dan $\frac{\pi}{2}$ -yə qədər artdıqda y-in qiyməti 0-dan 1-ə qədər artır; x-in qiyməti $\frac{\pi}{2}$-dən π-yə qədər artdıqda y-in qiymətləri 1-dən 0-a qədər azalır; x-in qiyməti π-dən $\frac{3\pi}{2}$ -yə qədər artdıqda y-in qiyməti 0-dan –1-ə qədər azalır; x-in qiyməti $\frac{3\pi}{2}$ -dən 2π -yə qədər artdıqda y-in qiyməti –1-dən 0-a qədər artır.

$y = \sin x$ funksiyasının qiymətlər cədvəli və qrafiki əsasında onun xassələrini sadalayaq:

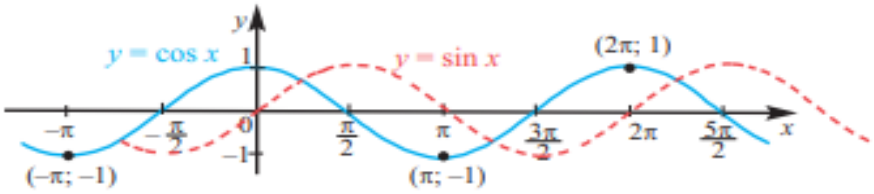
1. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
2. Qiymətlər çoxluğu $[-1; 1]$ parçasıdır.
3. $\sin x$ funksiyası tək funksiyadır: $\sin(-x) = -\sin x$. Yəni qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.
4. Dövrü 2π olan dövri funksiyadır: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
5. Sinusoid absis oxunu ... , -2π; $-\pi$; 0; π; 2π; 3π, ... və s. nöqtələrində kəsir, yəni $x = \pi n$ $(n \in Z)$ olduqda $y = \sin x$ funksiyası sıfra çevrilir.

Sinusoid koordinat başlanğıcından keçir.

6. Funksiyanın maksimum qiyməti 1-dir və bu qiyməti x-in ... , $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$ ... yəni $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.
7. Funksiyanın minimum qiyməti –1-dir və bu qiyməti x-in ... , $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$; ... yəni $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.

$y = \cos x$ funksiyasının qrafiki

$y = \cos x$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ parçasında $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə analoji qaydada vahid çevrədən istifadə etməklə həndəsi üsulla, həmçinin qiymətlər cədvəlinə görə qurmaq olar. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ olduğundan $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürməklə $y = \cos x$ funksiyasının qrafiki alınır.



$y = \cos x$ funksiyasının qrafiki əsasında onun xassələrini sadalayaq:

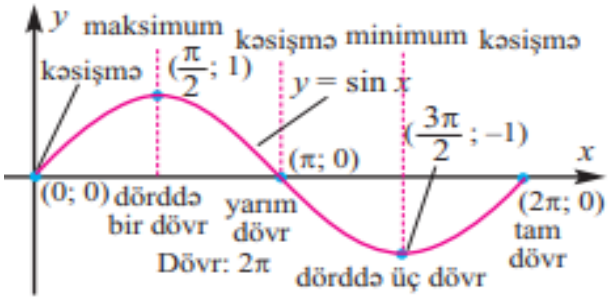
1. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. $x \in R$
2. Qiymətlər çoxluğu $[-1; 1]$ parçasıdır.
3. $y = \cos x$ funksiyası cüt funksiyadır (qrafiki y oxuna nəzərən simmetrikdir).
4. Əsas dövrü 2π olan dövri funksiyadır: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5. Qrafik absis oxunu $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ və s. nöqtələrində kəsir, yəni $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ olduqda $y = \cos x$ funksiyası sıfra çevrilir.

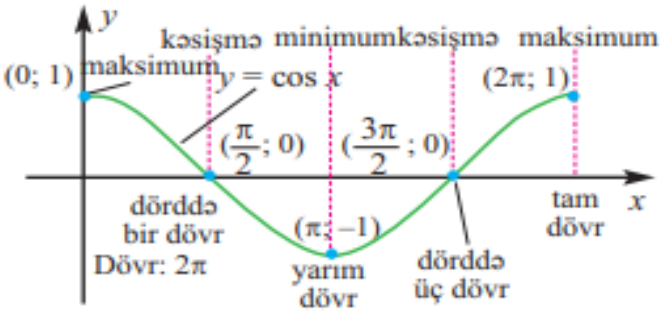
   Qrafik ordinat oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir.
6. Funksiyanın maksimum qiyməti 1-dir və bu qiyməti x-in $\ldots, -2\pi; 0; 2\pi; 4\pi, 6\pi, \ldots$ yəni $x = 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.
7. Funksiyanın minimum qiyməti -1-dir və bu qiyməti x-in $\ldots, -\pi; \pi; 3\pi; 5\pi, \ldots$ yəni $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyasılarının qrafiklərini beş əsas nöqtəyə (absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri və ekstremum nöqtələri) görə qurmaq əlverişlidir.

Beş əsas nöqtə $y = \sin x$ funksiyası üçün $[0; 2\pi]$ aralığında aşağıdakı ardıcıllıqla növbələşir: **sıfrı** **maksimum nöqtəsi** **sıfrı** **minimum nöqtəsi** **sıfrı**

Beş əsas nöqtə $y = \cos x$ funksiyası üçün $[0; 2\pi]$ aralığında aşağıdakı ardıcıllıqla növbələşir: **maksimum nöqtəsi** **sıfrı** **minimum nöqtəsi** **sıfrı** **maksimum nöqtəsi**





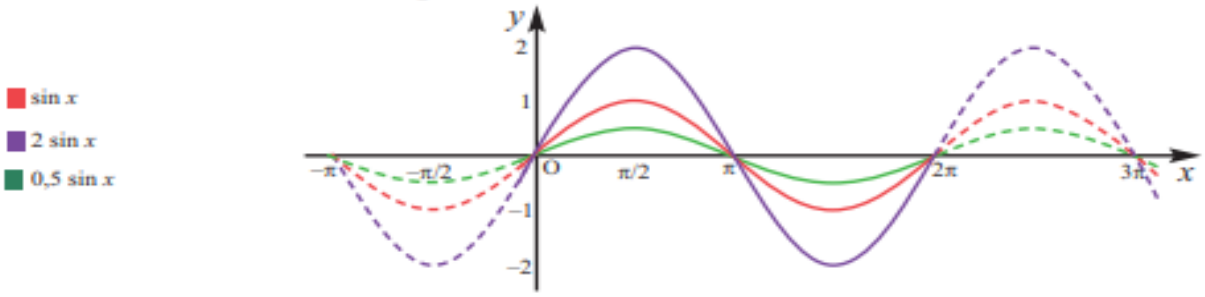
Mövzu 13

y=sinx və *y=cosx* funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri. *y=asinbx* və *y=acosbx* funksiyasının dövrü və amplitudu.

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri

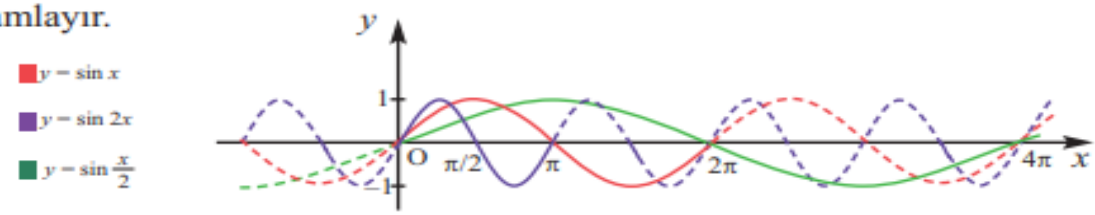
Sıxılma və dartılma

Nümunə 1. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtənin absisini olduğu kimi saxlayıb, ordinatını 2-yə vursaq, $y = 2 \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtə alınır. Bu o deməkdir ki, $y = 2 \sin x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin absis oxundan 2 dəfə dartılması ilə qurula bilər. $y = 0{,}5 \sin x$ funksiyasının qrafiki isə $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini absis oxuna 2 dəfə sıxmaqla alınar.



$y = a \sin x$ və $y = a \cos x$ funksiyalarının qrafikləri uyğun olaraq $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin $|a| > 1$ olduqda absis oxundan dartılması ilə, $|a| < 1$ olduqda isə absis oxuna sıxılması ilə alınır.
$a < 0$ olduqda funksiyanın qrafiki x oxuna nəzərən simmetrik çevrilir.

Nümunə 2. $y = \sin 2x$ funksiyası $y = \sin x$ funksiyasını 2 dəfə "qabaqlayır". $y = \sin x$ funksiyası 0-dan 1-ə qədər qiymətlərini $[0; \frac{\pi}{2}]$ parçasında, $y = \sin 2x$ funksiyası isə bu qiymətləri $[0; \frac{\pi}{4}]$ parçasında alır. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtənin ordinatını dəyişməyib, absisini $\frac{1}{2}$ -ə vursaq, $y = \sin 2x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtə alınır.
$y = \sin 2x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən 2 dəfə sıxılmış olur, tam dövrünü $[0; \pi]$ parçasında tamamlayır.
$y = \sin \frac{1}{2} x$ funksiyasının qrafiki isə $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin ordinat oxundan 2 dəfə dartılması ilə alınır, tam dövrünü $[0; 4\pi]$ parçasında tamamlayır.

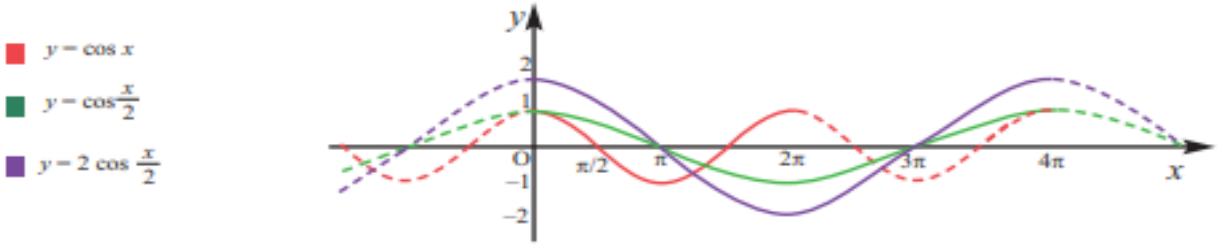


$y = \sin bx$ və $y = \cos bx$ funksiyalarının qrafikləri uyğun olaraq $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin $b > 1$ olduqda ordinat oxuna sıxılması ilə, $0 < b < 1$ olduqda isə ordinat oxundan dartılması ilə alınır.
$b < 0$ olan hal isə sinus funksiyasının tək, kosinus funksiyasının cüt olması nəzərə alınmaqla yuxarıdakı hala gətirilir.

✔ **$y = a \sin bx$ ($y = a \cos bx$) funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ ($y = \cos x$) funksiyasının qrafikinin koordinat oxları boyunca ardıcıl dartılması və ya sıxılması ilə alınan sinusoid olur.** $|a|$-nın qiyməti böyüdükcə amplitud artır, kiçildikcə amplitud azalır. $|b|$-nin qiyməti böyüdükcə funksiyanın dövrü kiçilir, kiçildikcə isə dövrü böyüyür.

Nümunə 3. $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafikini qurun.

1. $y = \cos x$ funksiyasının qrafiki ordinat oxundan 2 dəfə dartılmaqla $y = \cos\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafiki qurulur.
2. Alınmış qrafik absis oxundan 2 dəfə dartılır.



$y = a\sin bx$, $y = a\cos bx$ funksiyasının dövrü və amplitudu

Teorem: $y = f(x)$ funksiyası əsas dövrü T olan dövri funksiyadırsa, $y = a \cdot f(bx)$ funksiyası əsas dövrü $\frac{T}{|b|}$ olan dövri funksiyadır (burada a və b sıfırdan fərqli həqiqi ədədlərdir).

Buradan alınır ki, $y = a\sin bx$ (və $y = a\cos bx$) funksiyalarının **əsas dövrü** $\frac{2\pi}{|b|}$ olur. Doğrudan da,

$$f(x) = a\sin bx = a\sin(bx + 2\pi) = a\sin b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = f\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

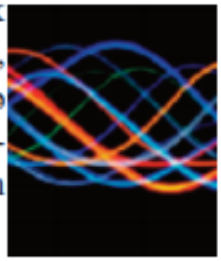
$$g(x) = a\cos bx = a\cos(bx + 2\pi) = a\cos b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = g\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)$$

$|a|$ **amplitudu** göstərir. Amplitud maksimum və minimum qiymətlərin fərqinin yarısına bərabərdir.

Nümunə. $y = -3\sin 4x$ funksiyasının amplitudu $|-3|$ və ya 3, əsas dövrü $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ -dir.

Mövzu 14

Triqonometrik funksiyalar və periodik hadisələr.



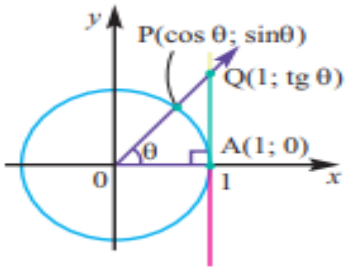
Təbiətdə, real həyati situasiyalarda çoxlu sayda periodik dəyişən hadisələrə rast gəlinir. Yer kürəsinin fırlanması, fəsillərin dəyişməsi, insanın nəfəs alması, ürək döyünməsi və s. Həmçinin bir çox fiziki hadisələrin (elektrik hadisələri, optika, rəqsi hərəkətlər və s.) tədqiqində dövri funksiyalardan istifadə edilir. Ən sadə rəqsi hərəkət olan harmonik rəqslər $y = a\sin(bx + c)$ və ya $y = a\cos(bx + c)$ şəklində triqonometrik funksiyalarla ifadə edilir.

Mövzu 15

y=tgx və *y=ctgx* funksiyaları və qrafikləri.

$y = \text{tg}\, x$ funksiyası

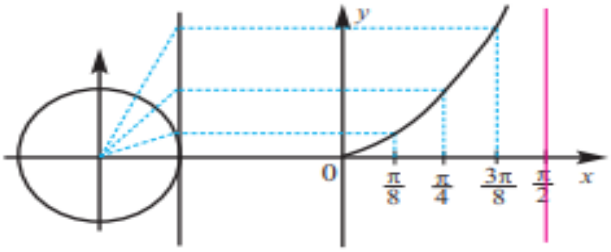
θ bucağının tangensinin qiyməti koordinat başlanğıcı və vahid çevrə üzərində yerləşən (cos θ; sin θ) nöqtələrindən keçən düz xəttin bucaq əmsalının qiymətidir.

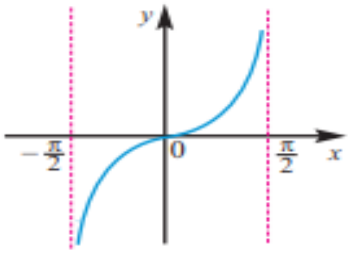


Şəkildən göründüyü kimi toxunanın AQ parçasının uzunluğu Q nöqtəsinin ordinatının qiymətinə bərabərdir. Q nöqtəsinin koordinatları (1; tg θ) kimidir. AQ düz xəttinə tangenslər xətti deyilir.

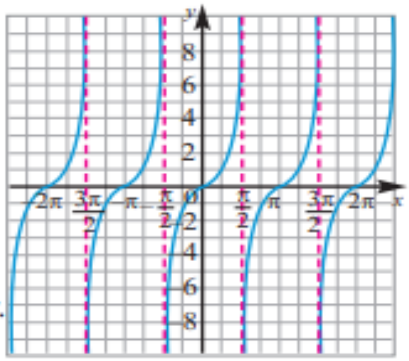
tg 0 = 0 olduğundan $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcından keçir. x dəyişəni $\frac{\pi}{2}$ -dən kiçik qalmaqla ona yaxınlaşdıqca tg x artır və $+\infty$-a yaxınlaşır. $x = \frac{\pi}{2}$ şaquli düz xəttinə, eləcə də $x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$ $(k \in Z)$ düz xətlərinə $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafikinin şaquli asimptotları deyilir.

Vahid radiuslu çevrənin I rübünü və $[0; \frac{\pi}{2})$ aralığını 4 bərabər hissəyə bölək və tangenslər xətti üzərində qiyməti uyğun bucaqların tangensinə bərabər olan parçalar quraq. Tangenslər xətti üzərində alınmış hər bir nöqtədən Ox oxu üzərində absisi uyğun bucağın qiymətinə bərabər olan nöqtədən qaldırılmış perpendikulyarı kəsənə qədər Ox oxuna paralellər çəkək. Göstərilən kəsişmə nöqtələrini ardıcıl olaraq səlis xətlə birləşdirsək, $[0; \frac{\pi}{2})$ aralığında $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının qrafikini alarıq. $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$ olduğu üçün, alınmış qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik çevirməklə $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ intervalında $\text{tg}\, x$-in qrafiki qurulur.





$y = \text{tg}\, x$ dövrü π olan dövri funksiyadır. Ona görə qurulmuş qrafiki π qədər sağa və sola davam etdirməklə tangensoid adlanan əyri alırıq.



- Funksiyanın qrafiki kəsilməz əyri deyil, x-in $\frac{\pi}{2}$ və onun tək misillərinə uyğun qiymətlərində kəsilir.
- Funksiyanın maksimumu və minimumu yoxdur.
- Funksiyanın qiymətlər oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
- Funksiyanın əsas dövrü π-yə bərabərdir.
- Funksiyanın qrafiki x oxunu $x = \pi n$, $(n \in Z)$ nöqtələrində kəsir
- Funksiya $\frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində təyin olunmamışdır. Bu nöqtələrdən keçən və punktirlə çəkilmiş xətlər qrafikin şaquli asimptotlarıdır.
- $y = \text{tg}\, x$ funksiyasının təyin oblastı $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $(n \in Z)$
- Funksiya iki qonşu asimptotu arasında artandır.
- Tək funksiyadır: $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$

$y = \text{ctg}\, x$ funksiyası

$y = \text{ctg}\, x$ funksiyasının qrafikini qurmaqdan ötrü

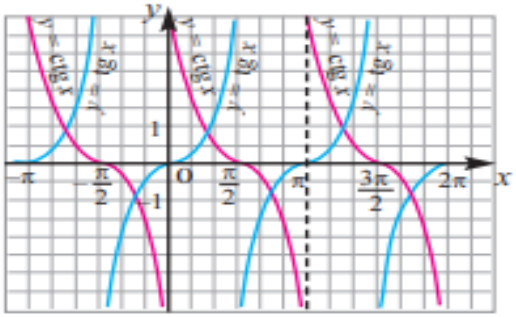
$$\text{ctg}\, x = -\,\text{tg}(x + \frac{\pi}{2})$$ eyniliyindən istifadə edək.

1) $y = \text{tg}\, x$ tangensoidi absis oxu boyunca $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürülür.

2) Alınan əyri absis oxuna nəzərən simmetrik əks etdirilir.

$x = \pi n$ olduqda tangensin qiyməti sıfıra brabərdir, kotangens funksiyası isə x-in bu qiymətlərində təyin olunmamışdır:

$$\text{ctg}\, x = \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

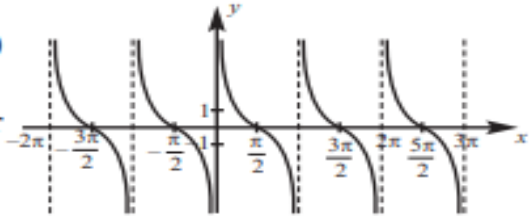


Qrafikdən göründüyü kimi, tangens və kotangens funksiyalarının qrafiklərinin x oxu ilə kəsişmə nöqtələri (sıfırları) və asimptotları yerini dəyişmişdir.

Əsas xassələri:

- Əsas dövrü π-dir.
- Təyin oblastı πn-dən (n istənilən tam ədəddir) fərqli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
- Qiymətlər oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
- İki asimptotu arasında azalan funksiyadır.
- Tək funksiyadır. $\text{ctg}\,(-x) = -\,\text{ctg}\, x$

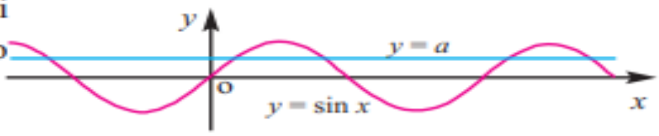
y = ctg x



Mövzu 16

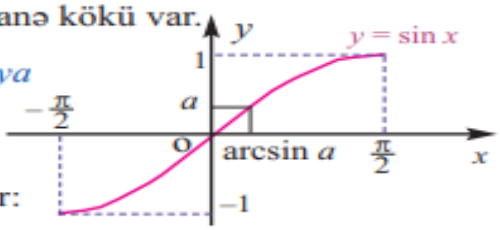
Tərs triqonometrik funksiyalar.

Absis oxuna paralel düz xətt sinusoidi sonsuz sayda nöqtədə kəsir. Bu o deməkdir ki, bütün ədəd oxunda $y = \sin x$ funksiyasının tərsi yoxdur.



Lakin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında $y = \sin x$ artandır və -1-dən 1-ə kimi bütün qiymətləri alır, həm də hər bir qiymətini arqumentin yalnız bir qiymətində alır. Deməli, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında $\sin x$ funksiyası dönəndir və $|a| \le 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında yeganə kökü var.

$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığından götürülən və sinusu a-ya bərabər olan bucağa a ədədinin arksinusu deyilir, arcsin a kimi işarə edilir.



$x = \arcsin a$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ 2) $\sin x = a$

Nümunələr. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, çünki $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, çünki $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ və $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

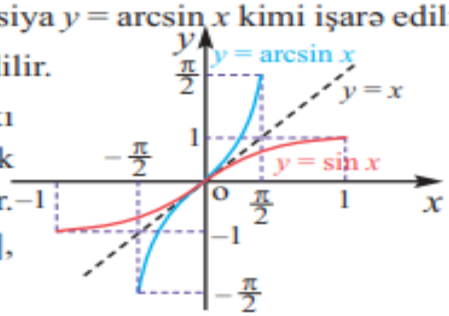
Tərifdən aydındır ki, $\sin(\arcsin a) = a$

Göstərmək olar ki, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Arksinusun köməyi ilə $[-1; 1]$ parçasında təyin olunan və qiymətlər çoxluğu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ olan funksiya təyin etmək olar. Bu funksiya $y = \arcsin x$ kimi işarə edilir.

$y = \arcsin x$ funksiyası $y = \sin^{-1} x$ kimi də işarə edilir.

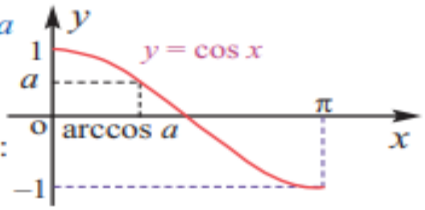
$y = \sin x$ funksiyasının $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığındakı qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y = \arcsin x$ funksiyasının qrafiki alınır.



$y = \arcsin x$ funksiyasının təyin oblastı $[-1; 1]$, qiymətlər çoxluğu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ olur.

Oxşar qayda ilə göstərilir ki, bütün ədəd oxunda $y = \cos x$ funksiyasının tərsi yoxdur. Lakin $[0; \pi]$ parçasında $y = \cos x$ azalandır və $[-1; 1]$ parçasına daxil olan bütün qiymətləri alır. Yəni, $[0; \pi]$ parçasında $y = \cos x$ funksiyası dönəndir və $|a| \le 1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin $[0; \pi]$ parçasında yeganə kökü var.

$[0; \pi]$ parçasından götürülən və kosinusu a-ya bərabər olan bucağa a ədədinin arkkosinusu deyilir, arccos a kimi işarə edilir.



$x = \arccos a$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $0 \le x \le \pi$ 2) $\cos x = a$

Nümunələr. $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, çünki $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$

$\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$, çünki $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ və $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$.

Tərifə görə: $\cos(\arccos a)=a$

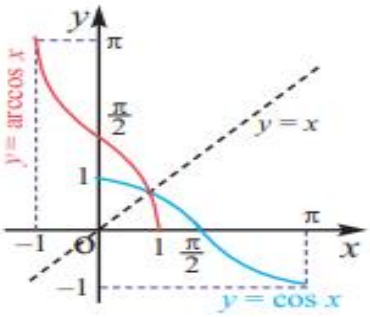
Göstərmək olar ki, $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

$[-1;1]$ parçasında təyin olunmuş $y=\arccos x$ funksiyası $[0;\pi]$ parçasında təyin olunmuş $y=\cos x$ funksiyasının tərsidir.

$y=\arccos x$ funksiyası $y=\cos^{-1}x$ kimi də yazılır.

$y=\cos x$ funksiyasının $[0;\pi]$ parçasındakı qrafikini $y=x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y=\arccos x$ funksiyasının qrafiki alınır.

$y=\arccos x$ funksiyasının təyin oblastı $[-1;1]$, qiymətlər çoxluğu $[0;\pi]$ kimidir.

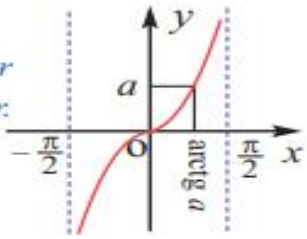


$y=\operatorname{tg}x$ funksiyası $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında artandır və $(-\infty;+\infty)$ aralığındakı bütün qiymətləri alır. Ona görə də istənilən a ədədi üçün $\operatorname{tg}x=a$ tənliyinin $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında yeganə kökü var.

$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığından götürülən və tangensi a-ya bərabər olan bucağa a-nın arktangensi deyilir, arctg a kimi işarə edilir.

$\operatorname{arctg}a=x$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 2) $\operatorname{tg}x=a$



Nümunələr. $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, çünki $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ və $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, çünki $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})=-1$ və $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

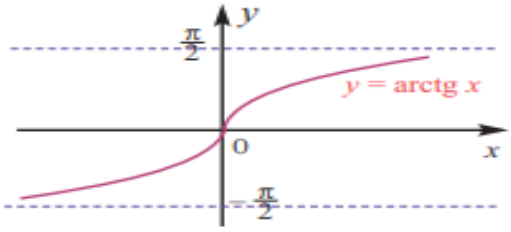
Tərifə görə: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$

Göstərmək olar ki, $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a$.

$y=\operatorname{arctg}x$ funksiyası $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında $y=\operatorname{tg}x$ funksiyasının tərsidir.

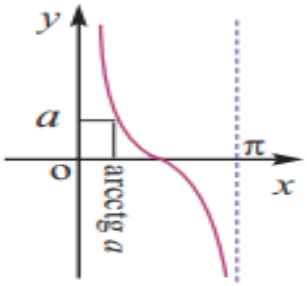
$y=\operatorname{tg}x$ funksiyasının $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığındakı qrafikini $y=x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y=\operatorname{arctg}x$ funksiyasının qrafiki alınır.

$y=\frac{\pi}{2}$ və $y=-\frac{\pi}{2}$ düz xətləri $y=\operatorname{arctg}x$ funksiyasının üfüqi asimptotlarıdır.



Oxşar qayda ilə arkkotangens anlayışı daxil edilir.

$(0;\ \pi)$ aralığından götürülən və kotangensi a-ya bərabər olan ədədə a-nın arkkotangensi deyilir, arcctg a kimi işarə edilir.



arcctg $a = x$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $0 < x < \pi$ 2) $\text{ctg}\, x = a$

Nümunələr. $\text{arcctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}$, çünki $\text{ctg}\ \frac{\pi}{4} = 1$ və $\frac{\pi}{4} \in (0;\ \pi)$

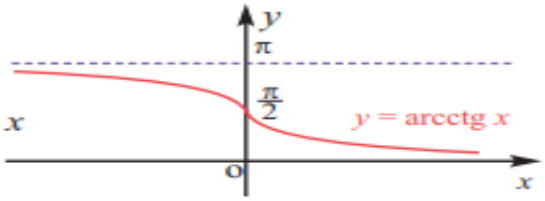
$\text{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, çünki $\text{ctg}\ \frac{3\pi}{4} = \text{ctg}(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -1$ və $\frac{3\pi}{4} \in (0;\ \pi)$.

Tərifə görə: $\text{ctg}(\text{arcctg}\ a) = a$

Göstərmək olar ki, $\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg}\ a$.

$y = \text{arcctg}\ x$ funksiyası $(0;\ \pi)$ aralığında $y = \text{ctg}\ x$ funksiyasının tərsidir.

$y = \text{ctg}\ x$ funksiyasının $(0;\ \pi)$ aralığındakı qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirməklə $y = \text{arcctg}\ x$ funksiyasının qrafiki alınır. Absis oxu və $y = \pi$ düz xətti $y = \text{arcctg}\ x$ funksiyasının üfüqi asimptotlarıdır.



$y = \text{arctg}\ x$ funksiyasını $y = \text{tg}^{-1}x$ kimi, $y = \text{arcctg}\ x$ funksiyasını $y = \text{ctg}^{-1}x$ kimi də işarə edirlər.

Kalkulyatorlarda $\text{ctg}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ kimi düymələr nəzərdə tutulmamışdır. Çünki bu funksiyaları $\text{tg}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ funksiyalarının köməyilə ifadə etmək mümkündür. Məsələn, $y = \sec^{-1}x$ isə deməli, $\sec y = x$ və bu funksiyanı kosinus ilə ifadə edə bilərik. $\frac{1}{\cos y} = x$ $\cos y = \frac{1}{x}$ Buradan: $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

Deməli, biz $y = \sec^{-1}x$ hesablamaq üçün $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$ -i hesablamalıyıq.

Diqqət edin! $\sin^{-1}x \xrightarrow{\text{demək deyil}} \frac{1}{\sin x}$

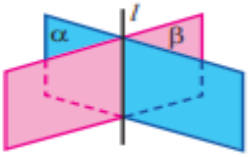
Mövzu 17

Çoxüzlülər, prizmalar. Çoxüzlülər və onların müxtəlif tərəfdən görünüşləri. Prizmanın səthinin sahəsi. Prizmanın müstəvi kəsikləri.

Çoxüzlülər

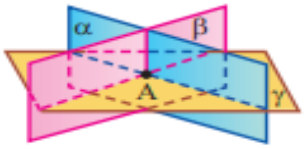
Məlumdur ki, müstəvilər fəzada müxtəlif qarşılıqlı vəziyyətdə ola bilərlər.

Kəsişən müstəvilər.



$\alpha \cap \beta = l$

Üç və daha çox sayda müstəvinin bir ortaq nöqtəsi ola bilər.



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A$

Kəsişməyən müstəvilər.

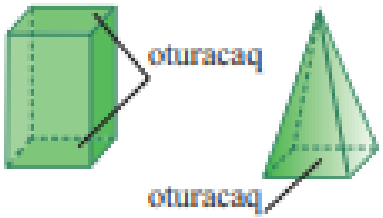
$\alpha \parallel \beta$

Müstəvilərin müxtəlif qarşılıqlı vəziyyəti çoxüzlülər adlanan fəza fiqurlarını (cisimlərini) yaradır.

Çoxüzlü - səthi sonlu sayda müstəvi fiqurlardan - çoxbucaqlılardan ibarət olan cisimdir. Çoxüzlünü hüdudlandıran çoxbucaqlılara onun **üzləri** deyilir. Çoxüzlünün ən azı 4 üzü var. Üzlərin kəsişdiyi düz xətt parçaları **til**, **tillərin** kəsişdiyi nöqtələr təpə adlanır. Çoxüzlünün səthini təşkil edən qonşu çoxbucaqlılar bir müstəvi üzərində deyildir, üç və daha çox üzə aid olan nöqtə təpə nöqtəsidir.

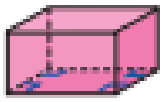
Prizma oturacaq adlanan iki üzü paralel və konqruyent çoxbucaqlı, qalan üzləri isə paraleloqram olan çoxüzlüdür.

Piramida oturacağı çoxbucaqlı, yan üzləri isə ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüdür.



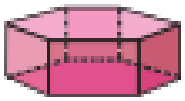
Prizma və piramida oturacaqlarındakı çoxbucaqlının adı ilə adlandırılır.

üçbucaqlı prizma

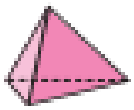


dördbucaqlı prizma

beşbucaqlı prizma



altıbucaqlı prizma



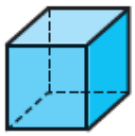
üçbucaqlı piramida

dördbucaqlı piramida

beşbucaqlı piramida

altıbucaqlı piramida

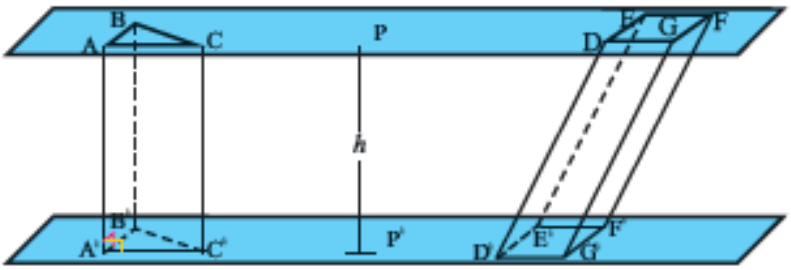
Bütün üzləri konqruyent düzgün çoxbucaqlılar olan və hər bir təpəsindən eyni sayda til çıxan qabarıq çoxüzlüyə düzgün çoxüzlü deyilir. Bu fiqurlara platonik fiqurlar da deyilir. Məsələn, kub düzgün çoxüzlüdür. Platonik fiqurların tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr kimi 5 növü var.

düzgün tetraedr	**kub**	**düzgün oktaedr**	**düzgün dodekaedr**	**düzgün ikosaedr**
				
hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 4 üzü var	*hər biri kvadrat olan 6 üzü var*	*hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 8 üzü var*	*hər biri düzgün beşbucaqlı olan 12 üzü var*	*hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 20 üzü var*

Prizmalar

Paralel müstəvilər üzərində yerləşən və paralel köçürmədə üst-üstə düşən iki konqruyent çoxbucaqlı və bu çoxbucaqlıların uyğun nöqtələrini birləşdirən bütün parçalardan ibarət fiqur prizma adlanır. Çoxbucaqlılara ***prizmanın oturacaqları***, oturacaqların uyğun təpələrini birləşdirən düz xətt parçalarına prizmanın ***yan tilləri*** deyilir. Yan tillərdən keçən müstəvi hissəyə ***prizmanın yan üzləri*** deyilir. Pirizmanın yan üzləri paraleloqramlardır. Bu paraleloqramların hər birinin iki tərəfi oturacaqların uyğun tərəfləri, digər iki tərəfi isə uyğun yan tillərdir.

Yan tilləri oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan prizmalar ***düz prizma***, perpendikulyar olmayanlar isə ***mail prizma*** adlanır.

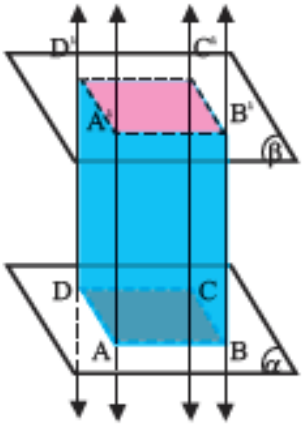


a) $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Oturacaqları üçbucaq olan düz prizma

b) $DEFG \cong D'E'F'G'$

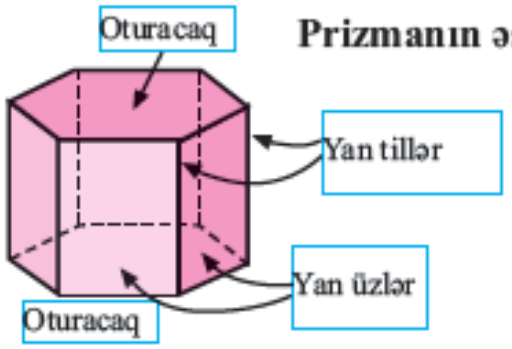
Oturacaqları dördbucaqlı olan mail prizma



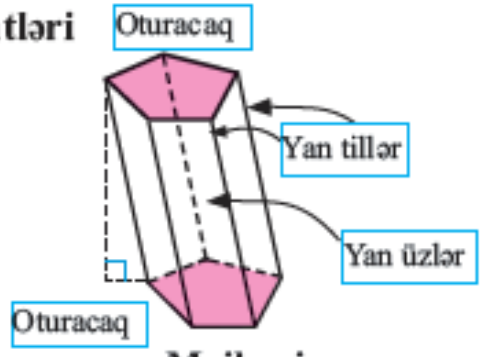
Düz prizmanın bütün yan üzləri düzbucaqlılardan ibarətdir.

Oturacağı düzgün çoxbucaqlı olan düz prizmaya düzgün prizma deyilir.

Prizmanın əsas elementləri



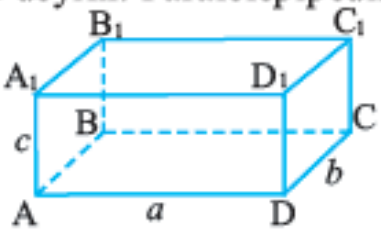
Düz prizma



Mail prizma

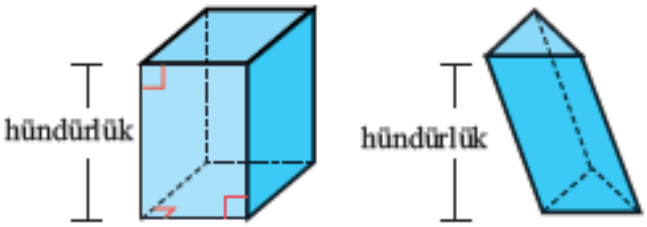
Prizmanın oturacaqları n-bucaqlıdırsa, ona n-bucaqlı prizma deyilir.
n-bucaqlı prizmanın $2n$ sayda təpə nöqtəsi, $n + 2$ sayda üzü, $3n$ sayda tili var.

Oturacağı paraleloqram olan prizmaya paralelepiped deyilir. Paralelepipedin qarşı üzləri paralel və konqruyentdir. Oturacağı düzbucaqlı olan düz paralelepipedə düzbucaqlı paralelepiped deyilir. Şəkildə ABCDA′B′C′D′ düzbucaqlı paralelepipeddir. Düzbucaqlı paralelepipedin bir təpəsindən çıxan tillərinin uzunluqları onun üç ölçüsünü göstərir.

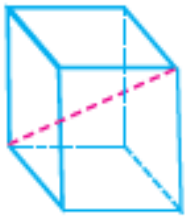


Prizmalar

Prizmanın oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə onun ***hündürlüyü*** deyilir. Düz prizmanın yan tili onun hündürlüyünə bərabərdir.

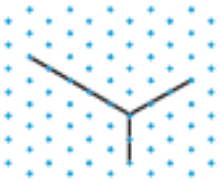


Prizmanın eyni üzündə olmayan iki təpəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun ***diaqonalı*** deyilir.



İzometrik nöqtəli vərəqdə 5×3×2 ölçüdə düzbucaqlı paralelepipedi verilən addımlarla çəkin.

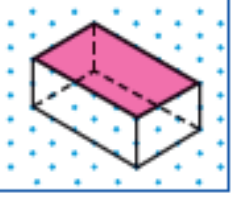
Prizmanın təpəsini - bir nöqtəni seçin, bu nöqtədən 2 vahid aşağı, 5 vahid sola, 3 vahid sağa düz xətt parçası çəkin.



Paraleloqramın hər bir təpəsindən uzunluğu 2 vahid olan parçalar çəkin.

Prizmanın üst oturacağını göstərən paraleloqramı çəkin.

Parçaların uclarını ardıcıl olaraq birləşdirin. Görünməyən tilləri qırıq xətlərlə çəkməyi unutmayın.

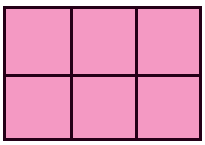


Çoxüzlülər və onların müxtəlif tərəflərdən görünüşləri

Kublarla müxtəlif konstruksiyalar quraşdırmaq olar. Bu cür konstruksiyalar kuboid də adlandırılır. Kuboidlərin müxtəlif tərəflərdən görünüşlərinin (planlarının) çəkilməsinin və ya əksinə müxtəlif görünüşlərin planına görə kuboidlərin quraşdırılması böyük praktiki əhəmiyyət daşıyır.

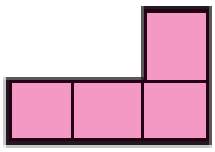
Praktik məşğələ. Aşağıda konstruksiyanın yuxarıdan, yandan və öndən görünüşünə görə fiqur quraşdırılmış və izometrik kağızda şəkli çəkilmişdir. Nümunə olaraq kub konstruksiyanın yuxarıdan, öndən və yandan görüntüləri verilmişdir. Siz kublardan müxtəlif konstruksiyalar düzəldin. Konstruksiya etdiyiniz fiqurun müxtəlif nöqtələrdən görünüşünü və izometrik vərəqdə təsvirini çəkin.

Yuxarıdan görünüş



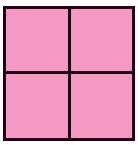
Yuxarıdan görünüşdən istifadə etməklə fiqurun oturacağını quraşdıraq.

Yandan görünüş

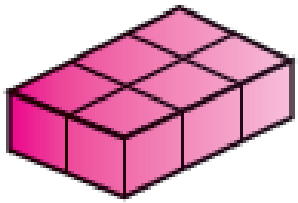


Yandan görünüşdən istifadə etməklə quraşdırmanı tamamlayaq

Öndən görünüş

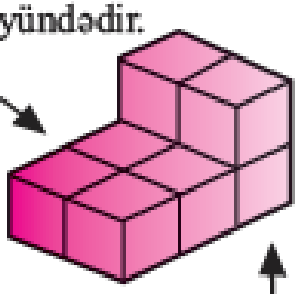


Öndən görünüşlə konstruksiyanın doğruluğunu yoxlayaq.



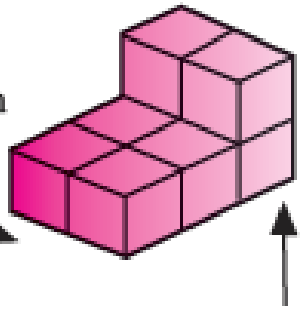
Oturacaq ölçüləri 2×3 vahid (kubla) olan düzbucaqlı formasındadır.

1-ci və 2-ci cərgə 1 kub hündürlüyündədir.



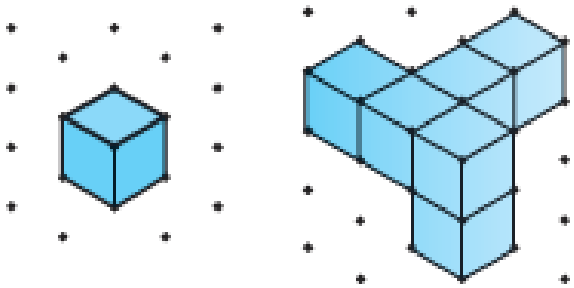
3-cü cərgə 2 kub hündürlüyündədir.

Konstruksiyanın eni 2 vahiddir



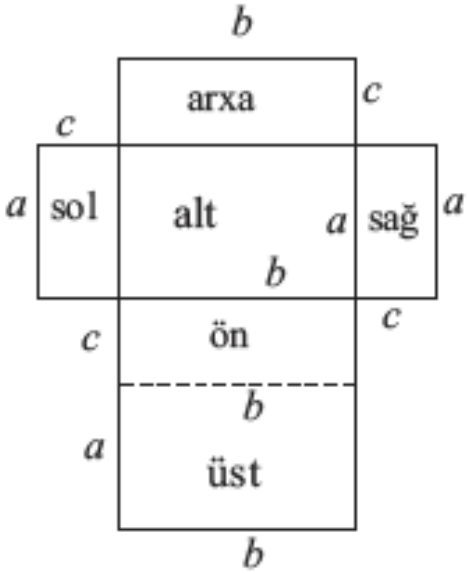
Konstruksiyanın hündürlüyü 2 vahiddir

Üçölçülü fiqurları təsvir etmək üçün izometrik nöqtəli vərəqlər əlverişlidir. Məsələn, kubun vahidə bərabər tilləri nöqtələr arasındakı vahid məsafəyə bərabərdir. Kubun təpələrini qeyd edib və ardıcıl birləşdirməklə onun üçölçülü görüntüsünü almaq olar. Analoji qayda ilə kuboidi təşkil edən bütün kublar çəkilir.



Prizmanın səthinin sahəsi

Araşdırma 1. Ölçüləri a, b, c olan düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsini tapın.



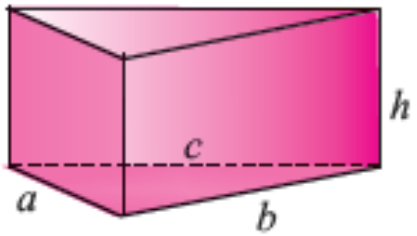
Paralelepipedin açılışı cüt-cüt konqruyent düzbucaqlılar olmaqla 6 düzbucaqlıdan ibarətdir. Paralelepipedin tam səthini hesablamaq üçün onun üzlərinin sahələrini hesablayaq.

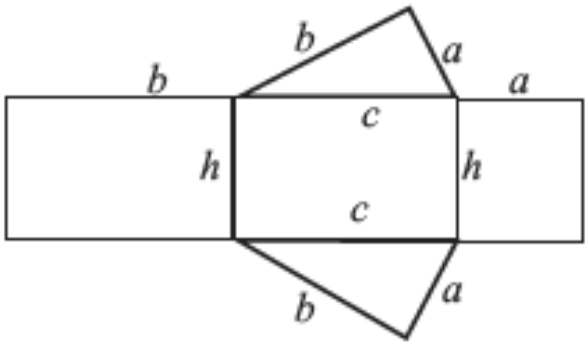
Üzlər	Sahəsi
1. Sol və sağ:	$ac + ac = 2ac$
2. Üst və alt:	$ab + ab = 2ab$
2. Ön və arxa:	$bc + bc = 2bc$

Bütün üzlərin sahələri cəmi: $S = 2ab + 2bc + 2ac$

Uzunluğu a, eni b, hündürlüyü c olan düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsi $S = 2(ab + ac + bc)$ düsturu ilə hesablanır.

Araşdırma 2. Hündürlüyü h və oturacağındakı üçbucağın tərəfləri a, b, c olan düz üçbucaqlı prizmanın yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayın.





Prizmanın açılışını çəkək.

Prizmanın yan səthi üç düzbucaqlıdan ibarətdir. Bu düzbucaqlıların sahələri cəmi prizmanın yan səthinin sahəsinə bərabərdir.

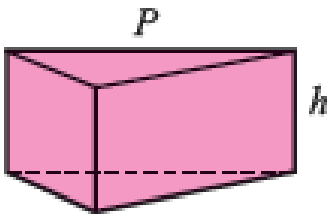
Yan səthini təşkil edən düzbucaqlıların sahələri cəmi:

$ah + bh + ch = (a + b + c)h = Ph$

Burada P oturacaqdakı üçbucağın perimetridir.

Prizmanın tam səthinin sahəsi yan səthinin sahəsi ilə oturacaqları təşkil edən iki üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir. Prizmanın tam səthini tapmaq üçün oturacaqlarının sahələrini tapmalıyıq. Prizmanın oturacaqları bu halda üçbucaqşəkillidir və bu üçbucaqların sahələri Heron düsturu ilə hesablana bilər.

Düz prizmanın yan səthinin sahəsi



Düz prizmanın yan səthinin sahəsi oturacağındakı çoxbucaqlının perimetri ilə hündürlüyü (yan tili) hasilinə bərabərdir.

$$S_{yan} = Ph$$

Burada P oturacağın perimetrini, h prizmanın hündürlüyünü göstərir.

Prizmanın tam səthinin sahəsi

Prizmanın tam səthinin sahəsi oturacaqları ilə yan səthinin sahələri cəminə bərabərdir.

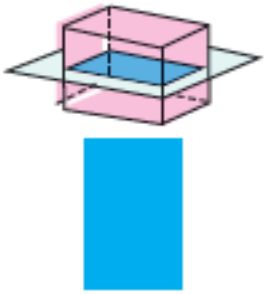
$$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan}$$

Düz prizmanın tam səthinin sahəsi $S_{tam} = 2S_{ot} + Ph$ düsturu ilə hesablanır.

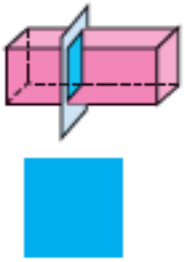
Prizmanın müstəvi kəsikləri

Prizmaların müstəvi ilə kəsişməsi nəticəsində onun üzərində qalan iz müstəvi kəsiyinin formasını müəyyən edir. Şəkildə düzbucaqlı paralelepipedin müstəvi kəsikləri təsvir edilmişdir.

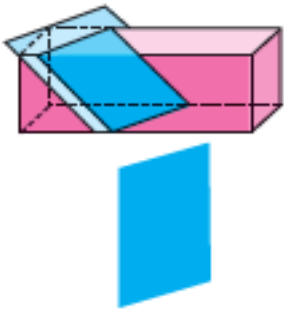
Oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsişməsi. **Düzbucaqlı alınır**



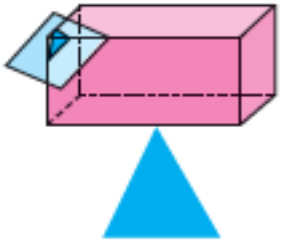
Oturacaqa perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsi. **Düzbucaqlı alınır.**



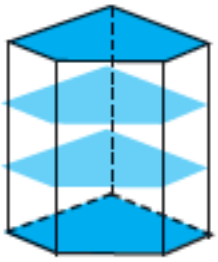
Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə qarşı üzləri kəsən müstəvi. **Paraleloqram alınır.**



Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə bir təpədən çıxan tilləri kəsən müstəvi. **Üçbucaq alınır.**



Diqqət edin! Müstəvi kəsiyi dedikdə ayrılan hissə deyil, fiqurun üzərində qalan iz nəzərdə tutulur.



Prizmanın yan tillərinə perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsindən alınan çoxbucaqlıya onun perpendikulyar kəsiyi deyilir. Prizmanın oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiyi oturacaqlara konqruyent çoxbucaqlıdır.

Prizmanın eyni üzə aid olmayan iki yan tilindən keçən kəsiyə diaqonal kəsiyi deyilir.

n-bucaqlı prizmanın diaqonal kəsiklərinin sayı $\frac{n(n-3)}{2}$-yə bərabərdir. Diaqonal kəsiklərinin hər biri paraleloqram olduğundan alınır ki, n bucaqlı prizmanın $n(n-3)$ sayda diaqonalı var.

Mövzu 18

Piramida. Piramidanın yan və tam səthinin sahəsi. Piramidanın kəsikləri. Kəsik piramida.

Piramida. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsi

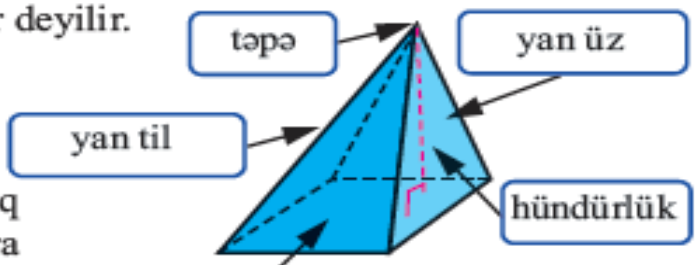
Piramida bir üzü çoxbucaqlı, qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüdür. Ortaq təpəli üçbucaqlar piramidanın yan üzləri, çoxbucaqlı isə oturacağıdır.

Yan üzlərin ortaq tərəflərinə yan tillər deyilir.

Yan üzlərdəki üçbucaqların ortaq təpəsinə piramidanın təpəsi deyilir.

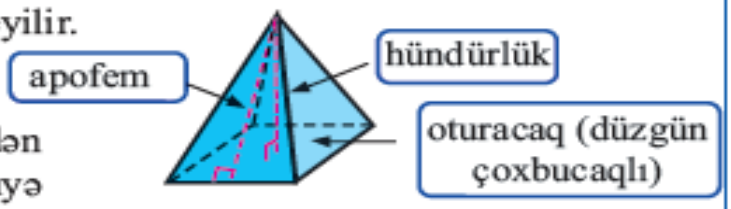
Piramidanın təpəsindən oturacaq müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyara piramidanın hündürlüyü deyilir.

Oturacağı düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyünün oturacağı bu çoxbucaqlının mərkəzi ilə üst-üstə düşən piramidaya düzgün piramida deyilir.



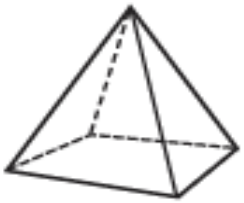
Dördbucaqlı piramida

Düzgün piramidanın yan üzündə təpədən oturacağın tərəfinə çəkilmiş hündürlüyə apofem deyilir.

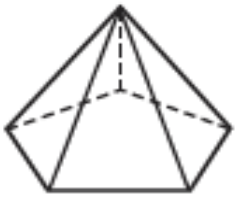


Düzgün dördbucaqlı piramida

Piramida oturacağındakı çoxbucaqlının adı ilə adlandırılır. Məsələn, üçbucaqlı piramida, dördbucaqlı piramida və s.



Dördbucaqlı piramida



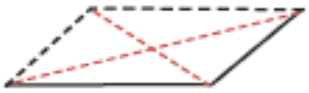
Beşbucaqlı piramida

Üçbucaqlı piramida

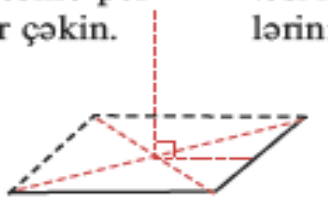
Düzgün piramidanın yan tilləri konqruyentdir.
Düzgün piramidanın yan üzləri konqruyent bərabəryanlı üçbucaqlardır.
Düzgün üçbucaqlı piramidaya tetraeder də deyilir. *Tetra* yunanca dörd deməkdir, yəni 4 üzü (hər biri üçbucaq formasında) olan çoxüzlü.

Xüsusi halda piramidanı aşağıdakı addımlarla çəkmək olar.

1. Paraleleoqram və onun diaqonallarını çəkin.



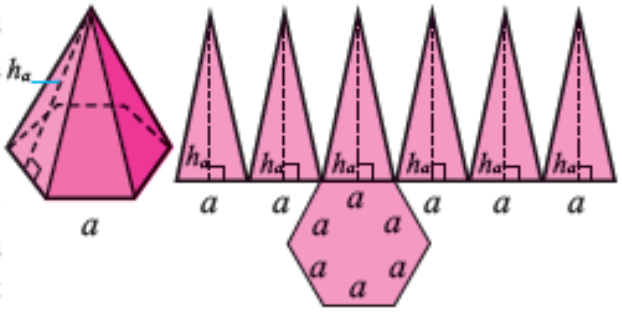
2. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsinə perpendikulyar çəkin.



3. Perpendikulyarın uc nöqtəsi ilə paraleloqramın təpələrini birləşdirin.

Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi onun yan üzlərini təşkil edən konqruyent üçbucaqların sahələri cəmidir.

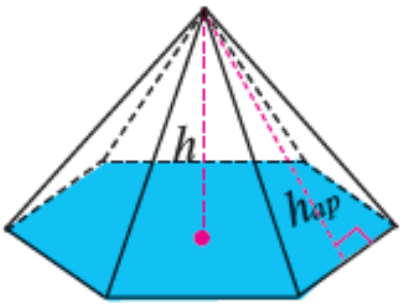
Məsələn, şəkildəki altıbucaqlı piramidanın yan səthinin sahəsi onun yan səthini təşkil edən 6 konqruyent üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir.



$$S = \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} =$$

$$= \frac{1}{2}h_{ap}(a + a + a + a + a + a) = \frac{1}{2}Ph_{ap}; \qquad S = \frac{1}{2}Ph_{ap}$$

Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi



Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi oturacağındakı çoxbucaqlının perimetri ilə piramidanın apofemi hasilinin yarısına bərabərdir.

$$S_{yan} = \frac{1}{2}Ph_{ap}$$

Burada P oturacağın perimetrini, h_{ap} piramidanın apofemini göstərir.

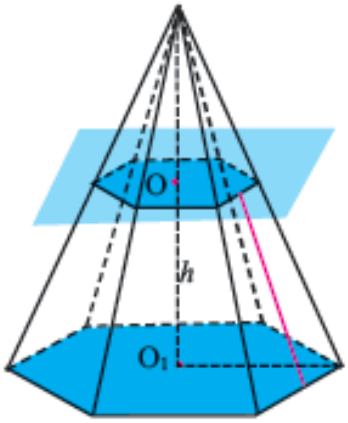
Piramidanın tam səthinin sahəsi oturacağı ilə yan səthinin sahələri cəminə bərabərdir. $S_{tam} = S_{yan} + S_{ot}$

Piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə bu müstəvi ilə piramidanın oturacağı arasında qalan çoxüzlüyə kəsik piramida deyilir.

Kəsik piramidanın paralel üzləri onun oturacaqları, qalan üzləri isə yan üzləridir. Oturacaq müstəvilərinə perpendikulyar olan düz xəttin bu müstəvilər arasında qalan parçasına kəsik piramidanın hündürlüyü deyilir.

Düzgün piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə alınan kəsik piramida da düzgün kəsik piramidadır.

Düzgün kəsik piramidanın yan üzləri konqruyent bərabəryanlı trapesiyalardır. Bu trapesiyaların hündürlüyü düzgün kəsik piramidanın apofemidir.

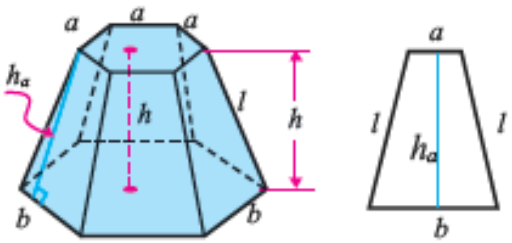


Düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi $S_{yan} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot h_a$ düsturu ilə tapılır.

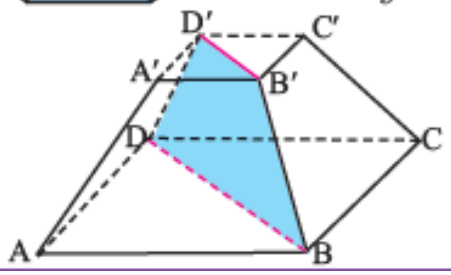
Burada P_1 və P_2 düzgün kəsik piramidanın oturacaqlarının perimetrləri, h_a - apofemdir.

Kəsik piramidanın tam səthinin sahəsi isə yan səthinin , alt və üst oturacaqların sahələri cəmi kimi tapılır.

$S_{tam} = S_{yan} + S_{alt} + S_{üst}$



Kəsik piramidanın bir üzündə olmayan iki yan tilindən keçən müstəvi kəsiyi onun diaqonal kəsiyi adlanır.



Mövzu 19

Sadə triqonometrik tənliklərin həlli.

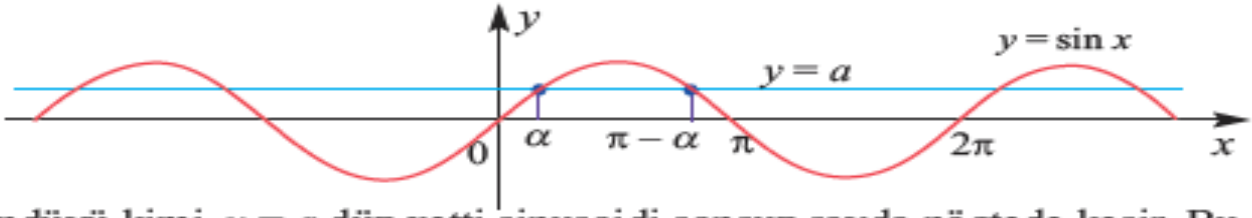
Sadə triqonometrik tənliklər

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ tənlikləri ən sadə triqonometrik tənliklərdir.

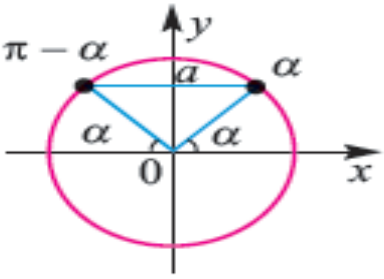
$\sin x = a$ tənliyi

Sinusun dəyişmə oblastı $[-1;\ 1]$ parçasıdır. Ona görə də, $|a| > 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin həlli yoxdur. $|a| \le 1$ olan hallara baxaq.

Eyni koordinat müstəvisində $y = \sin x$ və $y = a$ funksiyalarının qrafiklərini quraq.



Göründüyü kimi, $y = a$ düz xətti sinusoidi sonsuz sayda nöqtədə kəsir. Bu o deməkdir ki, $|a| \le 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin sonsuz sayda kökü var. Sinus dövri funksiya olduğundan, uzunluğu dövrə bərabər, yəni 2π olan hər hansı aralıqda kökləri tapmaq kifayətdir. Qrafikdən görünür ki, $|a| < 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin $[0;\ 2\pi]$ parçasında iki kökü var.



Nöqtənin çevrə üzrə fırlanma hərəkətinə baxdıqda da eyni nəticəyə gəlmək olar: Tam dövr ərzində sinusu eyni ədədə bərabər olan iki bucaq tapılır.

Dönmə bucaqlarından biri α olarsa, digəri $\pi - \alpha$ olur.

$\sin x = a$ ($|a| < 1$) tənliyinin qalan həlləri isə bu iki həllə dövrün misillərini əlavə etməklə alınır. Deməli, α $\sin x = a$ tənliyinin hər hansı həllidirsə, bu tənliyin bütün həlləri $x = \alpha + 2\pi n$, $x = \pi - \alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində yazılır. Bu iki həll ailəsini bəzən bir düsturla verirlər: $x = (-1)^k\alpha + \pi k$, $(k \in Z)$

$k = 2n$ (cüt) olduqda I həll ailəsi, $k = 2n + 1$ (tək) olduqda II həll ailəsi alınır.

$|a| \le 1$ olduqda **$\sin x = a$ tənliyinin** $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ parçasında kökü $x = \arcsin a$ olduğundan, bu tənliyin bütün həlləri $x = \arcsin a + 2\pi n$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $(n \in Z)$ düsturları ilə tapılır. Bu düsturları birləşdirib, **ümumi həlli** $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$ $(k \in Z)$ şəklində yazmaq olar.

Nümunə 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ tənliyinin $[0;3\pi]$ parçasında neçə kökü var?

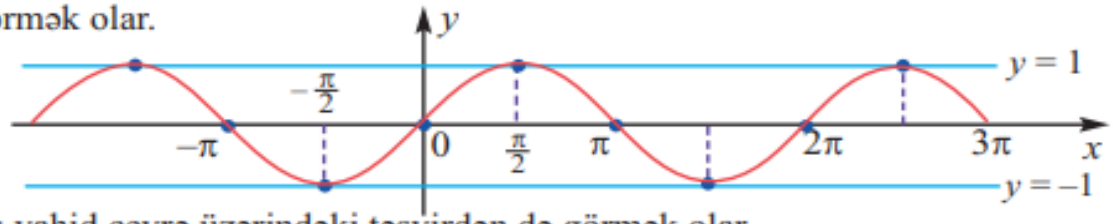
Həlli: Tənliyin həllini $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $(k \in Z)$ şəklində yazıb, $k = 0;\ 1;\ 2;3$ qiymətlərinə uyğun dörd kök tapırıq: $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$, $x_3 = \frac{17\pi}{6}$.

k parametrinin digər qiymətlərinə uyğun köklər verilən parçaya aid olmur.

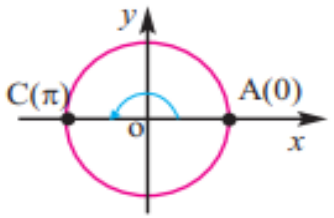
Nümunə 2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ olduğundan $x = (-1)^k\cdot(-\frac{\pi}{4}) + \pi k = (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4} + \pi k$, $(k \in Z)$

$a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin həllərini daha sadə şəkildə göstərmək olar.



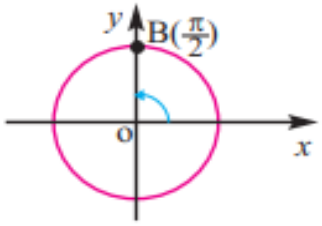
Bunu vahid çevrə üzərindəki təsvirdən də görmək olar.



ordinatı 0 olan nöqtələr A(0) və C(π)

$\sin t = 0$

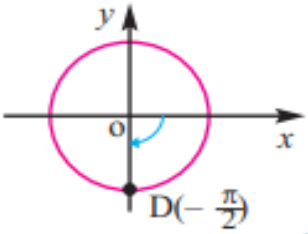
$t = \pi k \ (k \in Z)$



ordinatı 1 olan nöqtə B($\frac{\pi}{2}$)

$\sin t = 1$

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z)$



ordinatı –1 olan nöqtə D($-\frac{\pi}{2}$)

$\sin t = -1$

$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z)$

Nümunə 3. $\sin (x + \frac{\pi}{3}) = 1$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x + \frac{\pi}{3} = t$ əvəz etsək,

$\sin t = 1$ tənliyini alarıq. Bu tənliyin həlli $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z)$ olur.

Əvəzləməni nəzərə alaq: $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z)$

Buradan $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \ (k \in Z)$

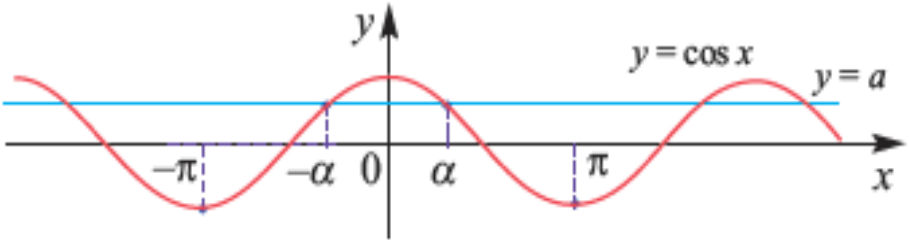
Nümunə 4. $\sin (x - 30^\circ) = 0$ tənliyini həll edin.

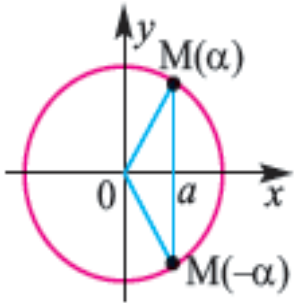
Həlli: Burada x-in dərəcələrlə ifadə edilmiş bucaq olduğu aydındır. Ona görə tənliyin həllini belə yazmaq olar:

$x - 30^\circ = 180^\circ \cdot k$ $\quad x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k \ (k \in Z)$.

$\cos x = a$ tənliyi

Oxşar qayda ilə alırıq ki, $|a| > 1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin həlli yoxdur, $|a| \le 1$ olduqda isə sonsuz sayda kökü var. Qrafikdən (eləcə də vahid çevrədən) görünür ki, uzunluğu dövrə (yəni 2π-yə) bərabər olan parçada $\cos x = a$ ($|a| < 1$) tənliyinin iki kökü var.





Əgər α $\cos x = a$ tənliyinin köküdürsə, onda $-\alpha$ da köküdür, çünki $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Beləliklə, $\cos x = a$ tənliyinin bir kökünün α olduğu məlumdursa, bu tənliyin həllərini $x = \alpha + 2\pi n$ və $x = -\alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$ düsturları ilə tapmaq olar. Bu iki düsturu bəzən birləşdirib, $x = \pm\alpha + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində yazırlar. $|a| \le 1$ olduqda **$\cos x = a$** tənliyinin $[0; \pi]$ parçasındakı kökü $x = \arccos a$ olduğundan bu tənliyin bütün həlləri

$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində olur.

Nümunə 5. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x = \frac{\pi}{4}$ tənliyin bir köküdür.

Onda bütün həlləri $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ və $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ olur.

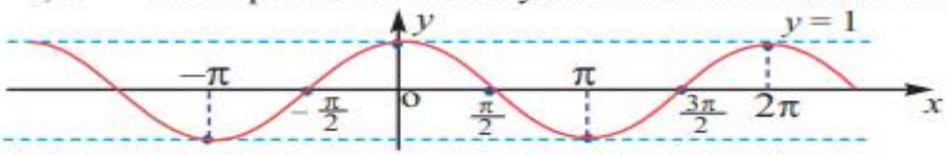
Həlli $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n \in Z)$ şəklində yaza bilərik.

Nümunə 6. $\cos x = -\frac{1}{2}$ tənliyini həll edin.

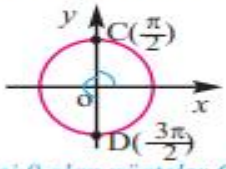
Həlli: $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n$ $(n \in Z)$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ olduğundan $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in Z)$

$a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin həllərini daha sadə vermək olar.



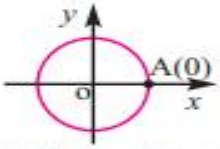
Bunu vahid çevrə üzərindəki təsvirdən də görmək mümkündür.



absisi 0 olan nöqtələr $C(\frac{\pi}{2}), D(\frac{3\pi}{2})$

$\cos t = 0$

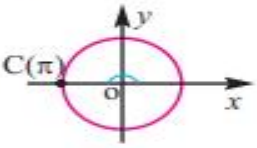
$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $(n \in Z)$



absisi 1 olan nöqtə A(0)

$\cos t = 1$

$t = 2\pi n$, $(n \in Z)$



absisi −1 olan nöqtə C(π)

$\cos t = -1$

$t = \pi + 2\pi n$, $(n \in Z)$

Nümunə 7. $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -1$ tənliyini həll edin.

$x + \frac{\pi}{4} = t$ əvəz edək: $\cos t = -1$ $t = \pi + 2\pi k$ $(k \in Z)$

Əvəzləməni nəzərə alaq: $x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$ $(k \in Z)$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ $(k \in Z)$

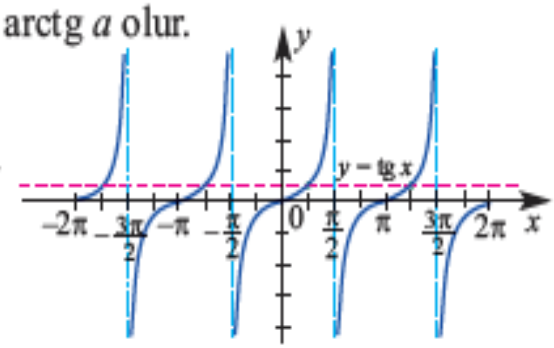
$\operatorname{tg} x = a$ və $\operatorname{ctg} x = a$ tənliklərinin həlli

$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ aralığında $\operatorname{tg} x = a$ tənliyinin həlli $x = \operatorname{arctg} a$ olur.

$\operatorname{tg} x$ funksiyasının əsas dövrünün π olduğunu nəzərə alsaq, **$\operatorname{tg} x = a$** tənliyinin bütün həllərini

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, (n \in Z)$$

düsturu ilə vermək olar.



$y = \operatorname{tg} x$ və $y = a$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələri də həllin düzgün olduğunu göstərir.

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, **$\operatorname{ctg} x = a$** tənliyinin bütün həlləri

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \ (n \in Z)$$ şəklindədir.

Nümunə 8. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x-\frac{\pi}{6}=t$ əvəz etsək

$\operatorname{tg} t=\sqrt{3}$ tənliyini alarıq. Bu tənliyin həlli $t=\frac{\pi}{3}+\pi n\ (n\in Z)$ olur.

Əvəzləməni nəzərə alaq:

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\pi n\ (n\in Z)$

$x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\pi n,\qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi n\ (n\in Z)$

Nümunə 9. $\operatorname{ctg} 3x=-1$ tənliyini həll edin.

Həlli: $3x=t$ əvəz edək: $\operatorname{ctg} t=-1$

$\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$ olduğuna görə $t=\frac{3\pi}{4}+\pi n$.

Əvəzləməyə görə $3x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$. Buradan hər iki tərəfi 3-ə bölməklə alırıq ki, $\operatorname{ctg} 3x=-1$ tənliyinin bütün həlləri $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $(n\in Z)$ şəklindədir.

$\operatorname{ctg} x=a$, $\sec x=a$, $\operatorname{cosec} x=a$ şəklində olan tənlikləri

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x},\ \sec x=\frac{1}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$$

bərabərliklərindən istifadə etməklə həll etmək olar.

Nümunə 11. $\operatorname{cosec} x+1=0$ tənliyini $x\in[0;2\pi]$ aralığında həll edin.

Həlli: $\operatorname{cosec} x=-1$

$\frac{1}{\sin x}=-1$ $\sin x=-1$ tənliyinin ümumi şəkildə həlli $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n\ (n\in Z)$ kimi olur. $\sin x=-1$ tənliyinin $[0;2\pi]$ aralığında həlli $x=\frac{3\pi}{2}$ -dir.

Mövzu 20

Triqonometrik tənliklərin həll üsulları.

Verilmiş triqonometrik tənliyin həlli müəyyən üsullarla sadə triqonometrik tənliyin həllinə gətirilir. Əsas həll üsullarını nümunələr üzərində göstərək.

1) Vuruqlara ayırma üsulu

Nümunə. $\sin 2x - \sin x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$ *ikiqat bucaq düsturuna görə* $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$ *ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarma*

$\sin x = 0$ və ya $2\cos x - 1 = 0$ *hasilin "0"-a bərabər olması şərti*

$x = \pi n,\ n \in Z$ | $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

Cavab: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n \in Z,\ k \in Z$

Müxtəlif həll ailələrində parametrlərin $(n,\ k)$ müxtəlif hərflərlə işarələnməsinə diqqət edin.

Nümunə. $\sin x \cos^2 x = 4\sin x$ tənliyini həll edin və $[0; 2\pi]$ parçasındakı köklərini tapın.

Həlli:

$\sin x \cos^2 x = 4\sin x$ *verilən tənlik*

$\sin x \cos^2 x - 4\sin x = 0$ *hər iki tərəfdən 4 sin x çıxılır*

$\sin x(\cos^2 x - 4) = 0$ *sin x mötərizə xaricinə çıxarılır*

$\sin x(\cos x - 2)(\cos x + 2) = 0$ *kvadratlar fərqi düsturu ilə vuruqlara ayrılır*

Hər bir vuruğu sıfıra bərabər etməklə x tapılır (əgər mümkünsə).

$\sin x = 0$	$\cos x - 2 = 0$	$\cos x + 2 = 0$
$x = \pi k,\ k \in Z$	$\cos x = 2$	$\cos x = -2$
	həlli yoxdur	həlli yoxdur

Tənliyin ümumi şəkildə həlli: $x = \pi k$ kimi olar $(k \in Z)$

Tənliyin $[0; 2\pi]$ parçasında kökləri: $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$.

2) Yeni dəyişən daxiletmə

Nümunə. $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0$ *$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ eyniliyinə görə*

$-2\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ *sadələşdirmə*

$2a^2 + a - 3 = 0$ *$\cos x = a$ yeni dəyişəni daxil edək*

$(2a + 3)(a - 1) = 0$

$a = -1{,}5$ | $a = 1$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\cos x = -1{,}5$ | $\cos x = 1$ *$\cos x = a$ əvəzləməsinə görə*

kökü yoxdur | $x = 2\pi k,\ k \in Z$

Cavab: $x = 2\pi k,\ (k \in Z)$.

3) Bircins tənliklərin həlli

$\sin x = a$, $\cos x = b$ olduqda tənliyin bütün hədləri a və b-yə görə eynidərəcəli birhədlilər olarsa, belə tənliyə bircins tənlik deyilir.

Nümunələr. $2\sin x - \cos x = 0$

$$\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

Ortaq vuruq yoxdursa, bircins tənlik hər iki tərəfi $\cos x$-in böyük qüvvətinə bölməklə həll edilir.

Nümunə. $\sin x + \cos x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $\cos x = 0$ ola bilməz, çünki $\cos x = 0$ olduqda tənlikdən $\sin x = 0$ alınır ki, bu da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyinə ziddir. Deməli, $\cos x \neq 0$ olmalıdır. Tənliyin hər iki tərəfini $\cos x$-ə bölə bilərik:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Buradan $\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

4) Dərəcəni azaltma düsturlarının tətbiqi

Nümunə. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada dərəcəni azaltma ($\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$) düsturunun tətbiqi əlverişli olur:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$$ *hər iki tərəfi 2-yə vuraq*

$$1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$$ *hər iki tərəfdən 1 çıxaq*

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$ *$2x = t$ əvəz edək*

$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$ $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ *olduğuna görə*

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$ *hər iki tərəfi 2-yə bölək*

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

5) Köməkçi bucaq daxiletmə

$a\sin x \pm b\cos x = d$ tipli tənlikləri $ab \neq 0$ olduqda hər iki tərəfi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə bölüb, köməkçi bucaq daxil etməklə həll etmək əlverişlidir.

Nümunə. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ olduğundan hər iki tərəfi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$-yə bölək:

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}} \cdot \cos x + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ *köməkçi $\frac{\pi}{6}$ bucağı daxil edilir*

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ *toplama düsturuna görə*

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ $t = x - \frac{\pi}{6}$ *əvəz edək*

$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ və ya $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = 2\pi n, n \in Z$

Cavab: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n, n \in Z.$

Mövzu 21
Prizmanın həcmi.

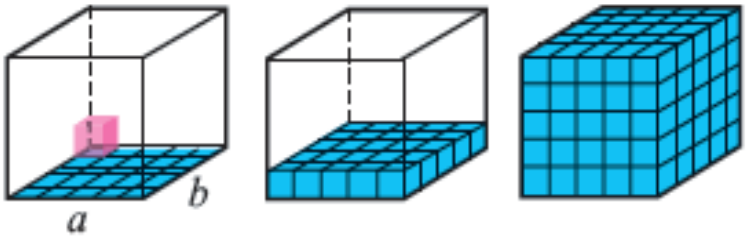
Cismi sonlu sayda üçbucaqlı piramidalara ayırmaq olarsa, ona sadə cisim deyilir. Sadə cisimlər üçün həcm - ədədi qiyməti aşağıdakı xassələri ödəyən müsbət kəmiyyətdir:

1) Konqruyent cisimlərin həcmləri bərabərdir.

2) Tili uzunluq vahidinə bərabər olan kubun həcmi kub vahidə bərabərdir.

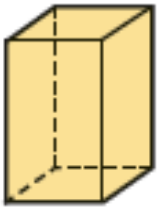
3) Cisim sadə cisimlərlə hissələrə ayrılırsa, onda bu cismin həcmi onun hissələrinin həcmləri cəminə bərabərdir.

Həcmləri bərabər olan cisimlərə müadil (eyni böyüklükdə) cisimlər deyilir.



Ölçüləri natural ədədlər olduqda düzbucaqlı paralelepipedin həcmi ədədi qiymətcə onu təşkil edən vahid kubların sayına bərabərdir. Ölçüləri istənilən həqiqi ədəd olduqda da göstərilir ki, düzbucaqlı paralelepipedin həcmi onun üç ölçüsünün hasilinə bərabərdir: $\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$

Həcm düsturunda $a \cdot b$ hasili oturacağın sahəsi, c isə hündürlük olduğundan onu belə də ifadə etmək olar: $\mathbf{V = S_{ot} h}$



Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

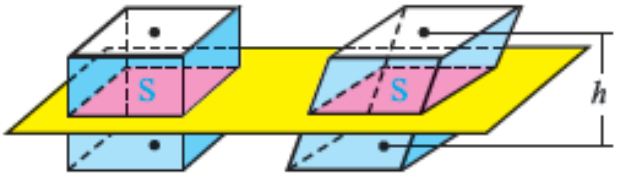
Tilinin uzunluğu a olan kubun həcmi: $\mathbf{V = a^3}$

İstənilən düz prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. Bu təklifin doğru olduğunu oturacağı düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizma üzərində göstərək.

Prizmanın həcmi

Həcmlər haqqında Kavalyeri prinsipi. Oturacaqları eyni müstəvi üzərində olub, hündürlükləri bərabər olan iki cismin oturacaqlara paralel istənilən müstəvi kəsiklərinin sahələri bərabərdirsə, həcmləri də bərabərdir.

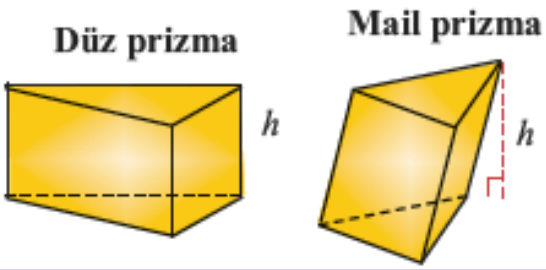
Bu prinsipi italyan riyaziyyatçısı Bonaventura Kavalyeri (1598-1647) aşkar etmişdir.



Prizmanın həcmi

Prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

$$V = S_{ot}h$$

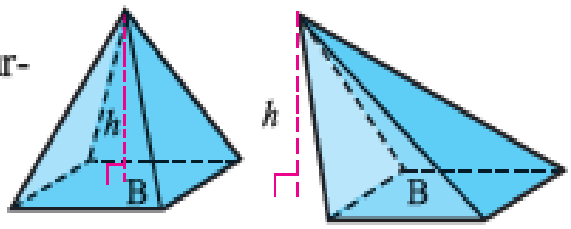


Mövzu 22
Piramidanın həcmi.

Piramidanın həcmi

Piramidanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.

$$V = \frac{1}{3}S_{ot}h$$

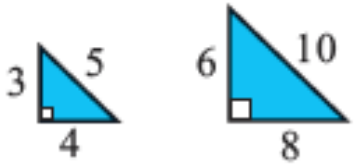


Mövzu 23
Fəza fiqurlarının oxşarlığı. Oxşar fəza fiqurlarının səthləri və həcmləri. Kəsik piramidanın həcmi.

Fəza fiqurlarının oxşarlığı

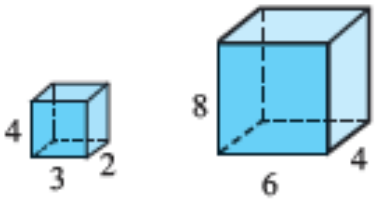
Oxşar fiqurlar formaca eyni olub, uyğun ölçüləri mütənasibdir.

Məsələn, şəkildəki düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır. Çünki, uyğun tərəflərinin nisbətləri bərabərdir.



$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$$

Şəkildəki düzbucaqlı paralelepipedlər də oxşardır. Çünki, uyğun xətti ölçüləri nisbətləri bərabər olmaqla uyğun üzləri oxşar düzbucaqlılardır.

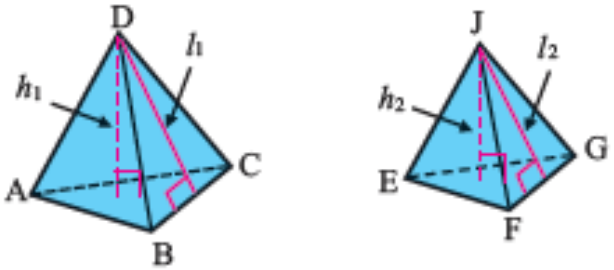


$$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$$

Düzgün çoxüzlülər oxşardır. Xüsusi halda, bütün kublar oxşardır, düzgün tetraedrlər oxşardır və s.

Oxşar fiqurlar

Çevrilmədə istənilən iki nöqtə arasındakı məsafə eyni ədəd dəfə dəyişərsə, belə çevrilməyə oxşarlıq çevrilməsi deyilir. Oxşarlıq çevrilməsi ilə biri digərinə çevrilən fiqurlara oxşar fiqurlar deyilir. Oxşarlıq əmsalı ixtiyari iki uyğun nöqtələr cütü arasındakı məsafələrin nisbətinə bərabərdir.



$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CA}{GE}=\frac{AD}{EJ}=\frac{BD}{FJ}=\frac{CD}{GJ}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{l_1}{l_2}=k$$

$\Delta ABC \sim \Delta EFG$, $\Delta ABD \sim \Delta EFJ$,
$\Delta BCD \sim \Delta FGJ$, $\Delta ACD \sim \Delta EGJ$

Uyğun xətti ölçülərin nisbətlərini göstərən ədədə oxşarlıq əmsalı deyilir.

Oxşar fiqurların səthləri və həcmləri

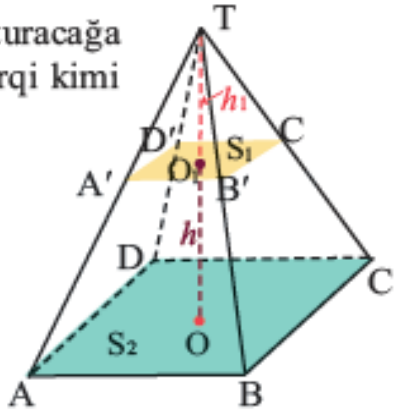
Əgər iki fəza fiqurunun oxşarlıq əmsalı $\frac{a}{b}$ kimi olarsa, bu fiqurların səthlərinin (yan, tam, oturacaq) nisbəti $\frac{a^2}{b^2}$ kimi, həcmlərinin nisbəti isə $\frac{a^3}{b^3}$ kimi olar.

A fiquru **B fiquru**

Oxşarlıq əmsalı: $\frac{a}{b}$

$$\frac{S_{tamA}}{S_{tamB}} = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3}{b^3}$$

Kəsik piramidanın həcmini verilən tam piramida ilə oturacağa paralel kəsiklə ayrılan kiçik piramidanın həcmləri fərqi kimi tapmaq olar.



$$V = \frac{1}{3}S_2(h_1 + h) - \frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$$

Burada V kəsik piramidanın həcmi, S_2 və S_1 böyük və kiçik piramidaların oturacaqlarının sahəsidir. h kəsik piramidanın hündürlüyü, h_1 kiçik piramidanın hündürlüyüdür. Bu piramidalar oxşar olduqlarına görə oturacaqlarının sahələri nisbətləri hündürlükləri nisbətinin kvadratına bərabərdir. Bu bərabərlikdən kiçik piramidanın hündürlüyünü tapaq:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{h_1}{h_1 + h}\right]^2, \qquad \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}, \qquad h_1\sqrt{S_2} = (h_1 + h)\sqrt{S_1}, \qquad h_1 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$$

h_1-in ifadəsini $V = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$ bərabərliyində nəzərə alaq:

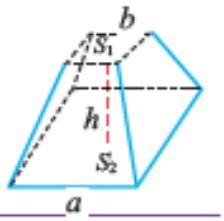
$$V = \frac{1}{3}\left[(S_2 - S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} + S_2h\right] = \frac{1}{3}[(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1})h\sqrt{S_1} + S_2h] =$$

$$= \frac{1}{3}(h \cdot \sqrt{S_1S_2} + h\,S_1 + h\,S_2) = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3}\,h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

Kəsik piramidanın həcmi

Oturacaqlarının sahəsi S_1 və S_2, hündürlüyü h olan kəsik piramidanın həcmi $\mathbf{V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)}$ düsturu ilə hesablanır.



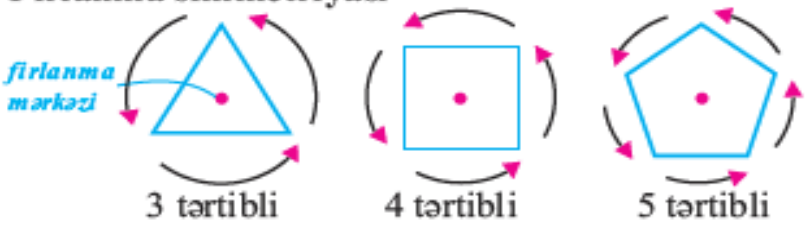
Mövzu 24
Fəzada simmetriya.

Fəzada simmetriya

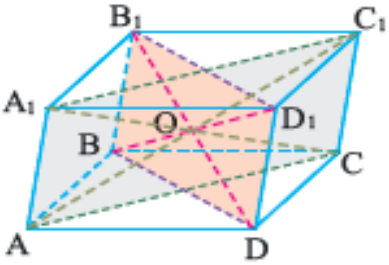
Müstəvidə simmetriya

Əksetmə (ox) simmetriyası

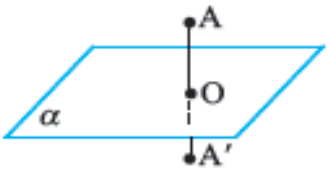
Fırlanma simmetriyası



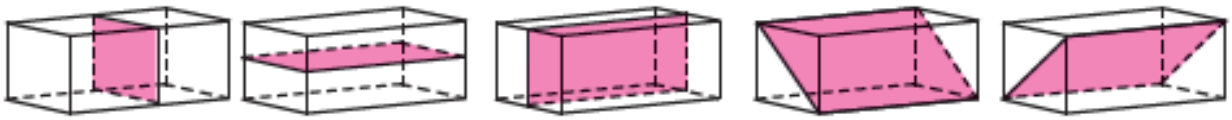
Fəzada simmetriya. Fəza fiqurları üzərində də müxtəlif simmetriyalar müşahidə etmək olar. Paralelepipedin diaqonal kəsikləri paraleloqram olduğundan aydındır ki, BD_1 və DB_1 diaqonalları bir O nöqtəsində kəsişib, yarıya bölünür. Göstərmək olar ki, digər diaqonallar da O nöqtəsində kəsişir və yarıya bölünürlər. Deməli, paralelepipedin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir.



Fəzada nöqtə və düz xəttə nəzərən simmetriyadan başqa müstəviyə nəzərən simmetriyaya da baxılır. α müstəvisi AA′ parçasının ortasından keçib, ona perpendikulyardırsa, A və A′ nöqtələrinə α müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtələr deyilir. Fiqurun nöqtələrinə müəyyən müstəviyə görə simmetrik olan nöqtələr də bu fiqura aiddirsə, həmin müstəviyə fiqurun simmetriya müstəvisi, fiqura isə müstəviyə nəzərən simmetrik fiqur deyilir.



Xətti ölçüləri müxtəlif olan düzbucaqlı paralelepipedin simmetriya mərkəzindən başqa üç simmetriya oxu və üç simmetriya müstəvisi vardır. Qarşı üzlərin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətt onun simmetriya oxudur, tilinin ortasından keçib, ona perpendikulyar olan müstəvi simmetriya müstəvisidir. İki xətti ölçüsü bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedin 5 simmetriya müstəvisi var. Bu təsvirləri dəftərinizdə çəkin.



Mövzu 25
İrrasional üstlü qüvvət. Üstlü funksiya. *e* ədədi.Üstlü funksiyanın qrafikinin çevrilmələri.

Oxşar qayda ilə a^{α} irrasional üstlü qüvvətə baxılır. α irrasional ədədinin

$$\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \ldots$$

onluq yaxınlaşmaları ardıcıllığına uyğun olaraq

$$a^{\alpha_1};\ a^{\alpha_2};\ a^{\alpha_3};\ \ldots$$

ardıcıllığı qurulur və bu ardıcıllığın hədlərinin yaxınlaşdığı ədəd a^{α} ilə işarə olunur.

İrrasional üstlü qüvvət də rasional üstlü qüvvət kimi müsbət əsaslar üçün təyin olunub.

Beləliklə, istənilən x həqiqi ədədi üçün a^x (burada $a > 0$) həqiqi üstlü qüvvət anlayışı daxil edilir.

Hesab edilir ki, istənilən x üçün $1^x = 1$ və $x > 0$ olduqda $0^x = 0$.

Rasional üstlü qüvvətin məlum xassələri həqiqi üstlü qüvvət üçün də doğrudur.

İstənilən x, y həqiqi ədədləri və $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ ədədləri üçün aşağıdakılar doğrudur:

Qüvvətin xassələri:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $a > 1, x > y$ olduqda $a^x > a^y$, $0 < a < 1, x > y$ olduqda $a^x < a^y$

7) $a > b, x > 0$ olduqda $a^x > b^x$, $a > b, x < 0$ olduqda $a^x < b^x$

8) $a^x = a^y$ isə, onda $x = y$

Üstlü funksiya

$a > 0$, $a \neq 1$ olduqda, $y = a^x$ funksiyasına üstlü funksiya deyilir.

1) Üstlü funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.

$$D(a^x) = (-\infty; +\infty)$$

2) Üstlü funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğudur.

$$E(a^x) = (0; +\infty)$$

3) $x = 0$ olduqda, $a^0 = 1$ olduğundan üstlü funksiyanın qrafiki y oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir.

4) $a > 1$ olduqda, a^x funksiyası artan, $0 < a < 1$ olduqda a^x funksiyası azalandır.

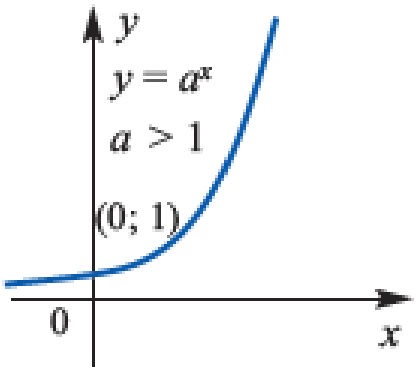
5) Üstlü funksiyanın qrafiki absis oxunu kəsmir və qrafiki x oxundan yuxarı yarımmüstəvidə yerləşir.

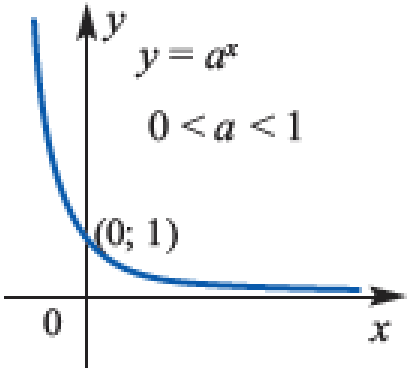
$y = a^x$ funksiyasına və onun qrafikinə eksponenta deyilir.

Eksponenta arqumentin dəyişməsilə çox sürətlə artır və ya çox sürətlə azalır.

6) $0 < a < 1$ olduqda x-in sonsuz böyüməsilə y-in uyğun qiymətləri kiçilir və $y = a^x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.
$a > 1$ və $x \to -\infty$ olduqda qrafik üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.
Absis oxu üstlü funksiyanın üfüqi asimptotudur.

Eksponensial artan , eksponensial azalan funksiyalar





$y = c \cdot a^x$ funksiyasına da eksponenta deyilir.

Üstlü funksiyanın ümumi şəkli $f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$

$f(x) = a^x$ funksiyası üstlü funksiyalar ailəsinin əsas funksiyasıdır. Bu funksiyanın müxtəlif çevrilmələrinə görə $f(x) = l \cdot a^x$, $f(x) = l \cdot a^{x-n}$, $f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$ şəkilli üstlü funksiyaların qrafikini qurmaq olar.

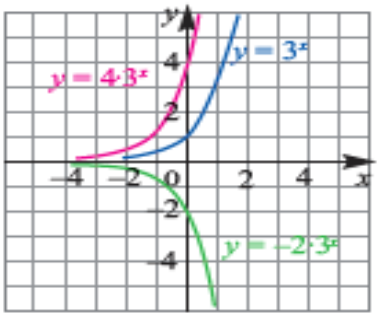
- Qrafik $|l|$ dəfə x oxundan şaquli olaraq dartılır.

  $(x, y) \to (x, ly)$

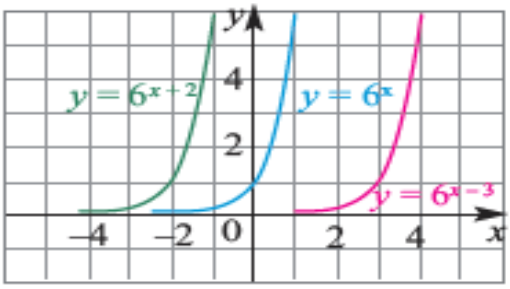
Məsələn, $y = 3^x$ və $y = 4 \cdot 3^x$

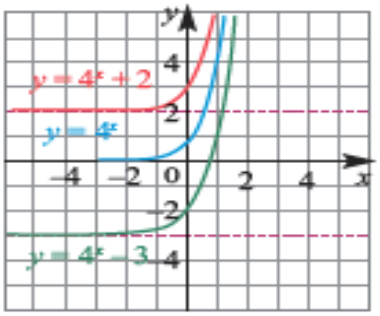
- $l < 0$ olduqda x oxuna nəzərən əksetmə baş verir.

Məsələn, $y = 3^x$ və $y = -2 \cdot 3^x$



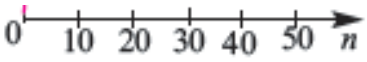
$f(x) = l \cdot a^{x-m} + n$ funksiyasının qrafikini $y = l \cdot a^x$ funksiyasının qrafikinin paralel köçürülməsi ilə qurmaq olar.





m • sağa və ya sola üfüqi sürüşmə n • yuxarı və ya aşağı şaquli sürüşmə

e ədədi



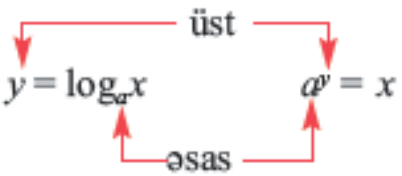
Araşdırmalar göstərir ki, n-in qiyməti artırdıqca $(1+\frac{1}{n})^n$ ifadəsinin qiyməti 2,71 ilə 2,72 arasında dəyişir. Bu ədəd e hərfi ilə işarə edilir və qiyməti $e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ kimidir. e ədədi də π ədədi kimi irrasional ədəddir. Bu ədədlər **transendent ədədlərdir**. Transendent ədədlər əmsalları tam ədədlər olan heç bir n dərəcəli tənliyin kökləri olmayan ədədlərə deyilir.

Ekponensial artma və ya azalmanı e əsasına görə $N = N_0e^{kt}$ düsturu ilə ifadə etmək olar. N_0 - ilkin miqdarı, t -zamanı göstərir. k -sabit ədəddir.

Mövzu 26
Ədədin loqarifmi. Loqarifmik funksiya. Loqarifmin xassələri.

Loqarifma

b ədədini almaq üçün a ədədinin yüksəldildiyi qüvvət üstünə b ədədinin a əsasdan loqarifmi deyilir və $y = \log_a b$ kimi yazılır. Burada $a \neq 1$ olmaqla a və b müsbət həqiqi ədədlərdir.



$y = \log_a x$ yazılışı $a^y = x$ bərabərliyinin loqarifmik yazılışıdır və ya əksinə $a^y = x$ yazılışı $y = \log_a x$ bərabərliyinin eksponensial yazılışıdır.

Yəni $a^y = x$ və $y = \log_a x$ yazılışları ekvivalent yazılışlardır.

- $\log_a 1 = 0$, çünki $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, çünki $a^1 = a$.
- $\log_a a^y = y$, çünki $a^y = a^y$
- $a^{\log_a x} = x$, çünki $\log_a x = \log_a x$

$a^{\log_a x} = x$ bərabərliyinə əsas loqarifmik eynilik deyilir.

Nümunə 1. Loqarifmik yazılışları eksponensial yazılışlarla əvəz edin.

a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$ c) $\log_8 1 = 0$

Həlli:

loqarifmik yazılış:	eksponensial yazılış:
a) $\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
b) $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$	$10^{-3} = \frac{1}{1000}$
c) $\log_8 1 = 0$	$8^0 = 1$

Nümunə 2. Loqarfmik ifadələrin qiymətini tapın.

a) $\log_3 27$ b) $\log_a a$ c) $\log_5 \sqrt[4]{5}$

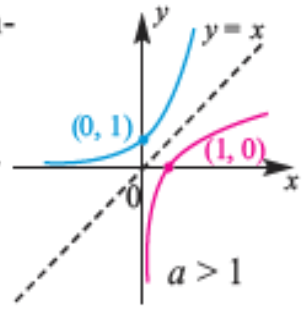
Həlli:

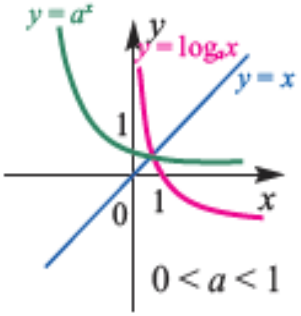
$\log_3 27 = x$ *işarə edək*	$\log_a a = x$	$\log_5 \sqrt[4]{5} = x$
$3^x = 27$ *eksponensial yazılış*	$a^x = a$	$5^x = \sqrt[4]{5}$
$3^x = 3^3$, $x = 3$ *qüvvətin xassəsinə görə*	$x = 1$	$x = \frac{1}{4}$

Əsası 10 və e ədədi olan loqarifmalar uyğun olaraq lg və ln kimi işarələnir. Əsası 10 olan loqarifma onluq loqarifma, əsası e olan isə natural loqarifma adlanır. $\log_{10}0{,}001 \Rightarrow \lg 0{,}001$ $\log_e c \Rightarrow \ln c$

Loqarifmik funksiya

$y = a^x$ funksiyasının qiymətlər oblastından götürülmüş hər bir qiymətə təyin oblastından götürülmüş yalnız bir qiymət uyğun gəlir. Yəni, $y = a^x$ funksiyasının tərsi olan funksiya var və bu funksiya $x = \log_a y$ funksiyasıdır.





Deməli, $y = a^x$ funksiyasının qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirsək, $y = \log_a x$ funksiyasının qrafikini alarıq.

1) Loqarifmik funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət ədədlər çoxluğudur:

$$D(\log_a x) = (0; +\infty)$$

2) Loqarifmik funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur:

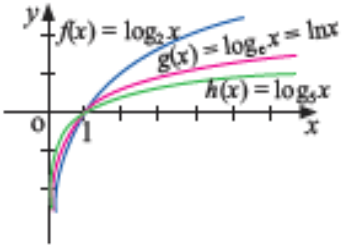
$$E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$$

3) Loqarifmik funksiya $a > 1$ olduqda artan, $0 < a < 1$ olduqda azalandır.

4) $y = \log_a x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu (1; 0) nöqtəsində kəsir.

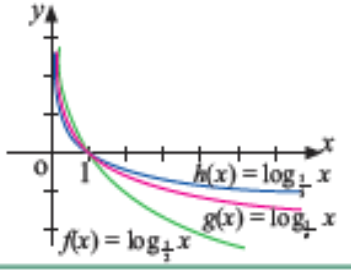
$a > 1$ olduqda nümunə olaraq $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_5 x$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. Qrafikləri dəftərinizdə qurun.

$a > 1$ olduqda $0 < x < 1$ olarsa, loqarifmik funksiya mənfi, $x > 1$ olarsa, müsbət qiymətlər alır.



$0 < a < 1$ olduqda nümunə olaraq $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{e}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir.

$0 < a < 1$ olduqda $0 < x < 1$ olarsa, loqarifmik funksiya müsbət, $x > 1$ olarsa, mənfi qiymətlər alır.



Loqarifmin xassələri

1. Hasilin loqarifmi: $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$

İki müsbət ədədin hasilinin loqarifmi vuruqların loqarifmləri cəminə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x və y müsbət həqiqi ədədlərdir.

2. Nisbətin loqarifmi: $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$

İki müsbət ədədin nisbətinin loqarifmi onların loqarifmləri fərqinə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x və y müsbət həqiqi ədədlərdir.

3. Qüvvətin loqarifmi: $\log_c x^y = y \cdot \log_c x$

Ədədin qüvvətinin loqarifmi qüvvət üstü ilə həmin ədədin loqarifmi hasilinə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x müsbət həqiqi ədəddir.

Bir əsasdan başqa əsasa keçmə

Əsas loqarifmik eyniliyə və qüvvətin loqarifminin xassəsinə görə

$$\log_c b = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a$$

Buradan: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ Xüsusi halda, $c = b$ olarsa, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Bir çox kalkulyatorlarda yalnız onluq (lg) və natural loqarifmləri (ln) hesablamaq üçün klaviş mövcuddur. Bu səbəbdən də loqarifmləri daha çox onluq və natural loqarifma şəklində yazmaq zərurəti yaranır.

$\log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a}$ $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Mövzu 27
Üstlü tənliklər. Loqarifmik tənliklər. Üstlü və loqarifmik bərabərsizliklər.

Üstlü tənliklər

Üstlü funksiyaların xassəsi. $a \neq 1$, $a > 0$ şərti ilə $a^x = a^y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.

Bu xassəyə görə alırıq:

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ üstlü tənliyi $f(x) = g(x)$ tənliyi ilə eynigüclüdür.

2) $a^x = c$ tənliyini $c > 0$ olduqda $a^x = a^{\log_a c}$ şəklində yazsaq, $x = \log_a c$ alarıq.

Verilmiş üstlü tənliklər müəyyən üsullarla sadə üstlü tənliklərə gətirilib, həll edilir.

1. Qüvvətin xassələrinin tətbiqi

Nümunə 1. $4^{2x} = 8^{2x-1}$ *verilən tənlik*

$(2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1}$ *eyni əsaslara gətirilir*

$2^{4x} = 2^{6x-3}$ *qüvvətin qüvvəti xassəsi*

$4x = 6x - 3$ *eynigüclü tənliyə gətirilir*

$2x = 3; \quad x = 1{,}5$ *tənliyin həlli*

Yoxlama: $4^{2\cdot 1{,}5} = 8^{2\cdot 1{,}5-1}$ $4^3 = 8^2$; $64 = 64$

Nümunə 2. $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$ *verilən tənlik*

$2\cdot 3^x\cdot 3 - 3^x = 45$ *qüvvətin xassəsi*

$3^x(6-1) = 45$ *ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması*

$3^x = 9$ *sadələşdirmə*

$x = 2$ *tənliyin həlli*

2. Əsaslar müxtəlif olduqda tənliyin hər iki tərəfi qüvvətlərdən birinə bölməklə və ya tənliyin hər iki tərəfini eyni əsasa görə loqarifmləməklə həll etmək olar.

Nümunə 3.

$3^{2x} = 5^x$ *tənliyi*

$(3^2)^x = 5^x$,

$9^x = 5^x$ *şəklində yazıb,*

hər iki tərəfini 5^x-ə bölək

$(\frac{9}{5})^x = 1$

Buradan

$x = 0$

Nümunə 4.

$2^{x-1} = 3^x$	*verilən tənlik*
$\lg 2^{x-1} = \lg 3^x$	*hər iki tərəfi on əsasdan loqarifmlənir*
$(x-1)\cdot \lg 2 = x \lg 3$	*loqarifmin xassəsi*
$x\cdot \lg 2 - \lg 2 = x \lg 3$	*vurmanın paylama xassəsi*
$x\cdot \lg 2 - x\cdot \lg 3 = \lg 2$	*oxşar hədlər qruplaşdırılır*
$x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 2$	*ortaq vuruq mötərizə xaricinə çıxarılır*
$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$	*tənliyin həlli*
$x \approx -1{,}7095$	*tənliyin təqribi kökü*

3. Yeni dəyişən daxil etməklə

Nümunə 5. $9^x - 2\cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ *verilən tənlik*

$3^{2x} - 2\cdot 3^x\cdot 3 - 27 = 0$	
$(3^x)^2 - 6\cdot 3^x - 27 = 0$	*qüvvətin xassəsi*
$3^x = y$	*yeni məchul daxil edilir*
$y^2 - 6y - 27 = 0$	*kvadrat tənliyə gətirilir*
$(y-9)(y+3) = 0$	*kvadrat tənliyin həlli*
$y = 9;\ y = -3$	
$3^x = 9$ $\quad 3^x = -3$	*əvəzləmə nəzərə alınır*
$x = 2$ $\quad \varnothing$	

Yoxlama:

$9^2 - 2\cdot 3^{2+1} - 27 = 0$

$81 - 54 - 27 = 0$

$0 = 0$

Cavab: $x = 2$

Tənliyə daxil olan qüvvətlərin üstləri eyni olub, əsaslar həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri olduqda hər iki tərəfi kənar hədlərdən birinə bölüb yeni dəyişən daxil edilir.

Nümunə 6. $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x = 0$ *hər iki tərəfi 4^x-ə bölək*

$3 + 2\cdot(\frac{9}{4})^x - 5\cdot(\frac{3}{2})^x = 0$		
$3 + 2\cdot(\frac{3}{2})^{2x} - 5\cdot(\frac{3}{2})^x = 0$		$(\frac{3}{2})^x = y$ *əvəz edilir*
$2y^2 - 5y + 3 = 0$		*kvadrat tənliyə gətirilir*
$y = 1$	$y = \frac{3}{2}$	*kvadrat tənliyin həlli*
$(\frac{3}{2})^x = 1$	$(\frac{3}{2})^x = \frac{3}{2}$	*əvəzləmə nəzərə alınır.*
$x = 0$	$x = 1$	*tənliyin həlli*

Loqarifmik tənliklər

Loqarifmik funksiyanın xassəsi

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ olduqda, $\log_a x = \log_a y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.

1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tənliyi $f(x) > 0$ və $g(x) > 0$ olmaq şərti ilə $f(x) = g(x)$ tənliyinə eynigüclüdür. $f(x) = g(x)$ tənliyini həll edib, tapılmış köklərin $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ şərtlərini ödəyib-ödəmədiyi yoxlanılır.

2) $\log_a f(x) = c$ tənliyini ekvivalent eksponensial yazılışla əvəz etsək, $f(x) = a^c$ alarıq.

Loqarifmik tənliklər müəyyən üsullarla sadə loqarifmik tənliyə gətirilib həll edilir.

1) Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə sadə loqarifmik tənliyə gətirilən tənliklər

Nümunə. $\log_3 x = 2 - \log_3 2$ *verilən tənlik*

$\log_3 x + \log_3 2 = 2$ *hər iki tərəfə $\log_3 2$ əlavə edilir*

$\log_3 (2x) = 2$ *loqarifmin xassəsinə görə*

$2x = 3^2$ *ekvivalent eksponensial yazılış*

$x = 4{,}5$ *tənliyin həlli*

2) Yeni dəyişən daxiletməklə həll olunan tənliklər

Nümunə. $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$ *verilən tənlik*

$\log_5 x = a$ *əvəzləmə edilir*

$a^2 - a - 2 = 0$ *kvadrat tənliyə gətirilir*

$(a - 2)(a + 1) = 0$ *kvadrat tənliyin həlli*

$a = 2 \qquad a = -1$ *əvəzləmə nəzərə alınır*

$\log_5 x = 2$	$\log_5 x = -1$
$x = 5^2$	$x = 5^{-1}$
$x = 25$	$x = \frac{1}{5}$

3) Eyni əsasa gətirməklə həll olunan tənliklər

Nümunə. $\log_4 x + \log_2 x = 6$ *verilən tənlik*

$\log_{2^2} x + \log_2 x = 6$ *loqarifmlər eyni əsasa gətirilir*

$\frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 6$

$\frac{3}{2} \log_2 x = 6$ *oxşar hədlərin islahı*

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4$ *eksponensial yazılış*

$x = 16$ *tənliyin həlli*

Loqarifmin xassələrinin tətbiqi ilə həll olunan daha bir misala baxaq.

Nümunə. $\lg (x + 4) + \lg (2x + 3) = \lg (1 - 2x)$ *verilən tənlik*

$\lg (x + 4)\cdot(2x + 3) = \lg (1 - 2x)$ *loqarifmin xassəsi*

$(x + 4)\cdot(2x + 3) = (1 - 2x)$ *cəbri tənliyə gətirilir*

$x_1 = -1;\ x_2 = -5{,}5$

Yoxlama.

Loqarifmaltı ifadələrdə müsbətlik şərti ödənməlidir, yəni

$x + 4 > 0, \qquad 2x + 3 > 0, \qquad 1 - 2x > 0$ olmalıdır.

$-5{,}5$ qiyməti bu şərtləri ödəmədiyi üçün kənar kökdür. -1 isə bu şərtləri ödəyir, deməli, tənliyin köküdür.

Cavab: -1

Üstlü bərabərsizliklər

Üstlü bərabərsizliklərin həlli adətən $a^x > a^b$ və ya $a^x < a^b$ bərabərsizliklərinin həllinə gətirilir. Burada $a > 0$, $a \neq 1$.
Bu bərabərsizliklərin həlli isə $y = a^x$ üstlü funksiyasının artan və ya azalan olması xassəsinin köməyilə həll edilir:
$a > 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə,
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə eynigüclüdür.
$0 < a < 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə,
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə eynigüclüdür.

Nümunə.

$2^{x+1} > 8$	*verilən bərabərsizlik*
$2^{x+1} > 2^3$	*qüvvətin xassəsi*
$x + 1 > 3$	*eynigüclü bərabərsizlik*
$x > 2$	*bərabərsizliyin həlli*

Nümunə.

$0{,}2^{x-1} > 0{,}04$	*verilən bərabərsizlik*
$0{,}2^{x-1} > 0{,}2^2$	*qüvvətin xassəsi*
$x - 1 < 2$	*eynigüclü bərabərsizlik*
$x < 3$	*bərabərsizliyin həlli*

$c = a^{\log_a c}$ eyniliyinə görə $a^x > c$ (və ya $a^x < c$) bərabərsizliyi
$a^x > a^{\log_a c}$ (və ya $a^x < a^{\log_a c}$) bərabərsizliyinin həllinə gətirilir

Üstlü bərabərsizlikləri müəyyən üsullarla sadə üstlü bərabərsizliyə gətirib həll edirlər.

1) Qüvvətin xassələrinin tətbiqi

Nümunə. a) $8 \cdot 4^{x-1} > 2^x$

$2^3 \cdot (2^2)^{x-1} > 2^x$

$2^{2x+1} > 2^x$

$2x + 1 > x$

$x > -1$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 30$ *verilən bərabərsizlik*

$3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} < 30$ *qüvvətin xassəsi*

$3^x(3 + \frac{1}{3}) < 30$ *qruplaşdırma*

$3^x < 30 \cdot \frac{3}{10}$ *sadələşdirmə*

$3^x < 9$

$3^x < 3^2$

$x < 2$

Qüvvət üstləri eyni olduqda qüvvətlərdən birinə bölmək əlverişli olur.

Nümunə. $2^x > 3^{2x}$ *verilən bərabərsizlik*

$2^x > 9^x \quad : 2^x$ *hər iki tərəfi 2^x-ə bölək*

$1 > (\frac{9}{2})^x$

$(\frac{9}{2})^x < (\frac{9}{2})^0$ *$a^0 = 1$ olduğuna görə*

$x < 0$

2) Yeni dəyişən daxiletmə

Nümunə. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 < 0$ *verilən bərabərsizlik*

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \qquad 2^x = a$ *əvəzləmə*

$a^2 - 6a + 8 < 0$ *kvadrat bərabərsizlik*

$(a - 2)(a - 4) < 0$

$2 < a < 4$ *əvəzləmə nəzərə alınır*

$2 < 2^x < 2^2 \qquad 1 < x < 2$

Loqarifmik bərabərsizliklər

Loqarifmik bərabərsizliklər dəyişənin mümkün qiymətləri, loqarifmik funksiyanın artan (və ya azalan) olması xassəsi nəzərə alınmaqla həll edilir.

Nümunə. $\log_2(x+1) > \log_2 7$
Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x+1>0$, $\log_2 x$ funksiyası artan olduğundan $x+1>7$ olmalıdır. Deməli, $x+1>0$ və $x+1>7$ bərabərsizliyini ödəyən x-ləri tapmalıyıq.
Buradan $x>6$. Cavab: $(6; +\infty)$

Nümunə. $\log_{0,2}(x-1) > \log_{0,2} 3$
Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x-1>0$, $\log_{0,2} x$ funksiyası azalan olduğundan $x-1<3$ olmalıdır. Deməli, $0<x-1<3$ ikiqat bərabərsizliyini həll etməliyik.
Buradan $1<x<4$. Cavab: $(1; 4)$

$a>1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	*eynigüclü bərabərsizlik*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$

$0<a<1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	*eynigüclü bərabərsizlik*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$

Nümunə. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$ bərabərsizliyini həll edək.
Loqarifmaltı ifadənin müsbətlik şərtinə görə $x>0$ olmalıdır.
$\log_2 x = t$ əvəz etsək, $t^2 - t - 2 < 0$ bərabərsizliyini alarıq.
Bu bərabərsizliyin həlli $-1<t<2$ olduğundan əvəzləməyə görə $-1<\log_2 x<2$ alınır. Buradan $\frac{1}{2}<x<4$. Cavab: $(\frac{1}{2}; 4)$

Mövzu 28
Kompleks ədədlər. Kompleks ədədlər üzərində əməllər. Kompleks ədədin həndəsi təsviri. Kompleks ədədin modulu və arqumenti. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli. Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər. Kompleks ədədin *n*-ci dərəcədən kökü.

Kompleks ədədlər

Həqiqi ədədlər çoxluğunda $x^2 = -1$ tənliyinin həlli yoxdur. Deməli, həqiqi ədədlər çoxluğunu elə genişləndirməliyik ki, yeni çoxluqda bu tənliyin kökü olsun.
Bu məqsədlə yeni i ədədi daxil edilərək, qəbul olunmuşdur ki, o, $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin köküdür, yəni $i^2 + 1 = 0$. Buradan isə $i^2 = -1$. Belə qəbuletmədən sonra $x^2 + 1 = 0$ tənliyinin kökləri $x_{1,2} = \pm i$ olacaqdır. i ədədi xəyali vahid adlanır.
Həqiqi ədədlər çoxluğunu elə genişləndirək ki, bütün həqiqi ədədlər və i ədədi bu çoxluğa daxil olsun, həm də bu çoxluqda toplama, vurma əməllərinin xassələri saxlanılsın. a və b istənilən həqiqi ədədlər olduqda yeni çoxluğa bi "hasilini" və $a + bi$ "cəmini" daxil edərək, $a + bi$ ifadəsinə şərti olaraq kompleks ədəd deyək. $a + bi$ şəklində ifadəyə kompleks ədəd deyilir. Burada a və b həqiqi ədədlərdir, i isə xəyali vahiddir.
Kompleks ədədləri z, w, ω və s. kimi işarə edəcəyik. Məsələn, $z = a + bi$.
$a + bi$ yazılışına kompleks ədədin cəbri şəkli deyilir. $z = a + bi$ kompleks ədədində a-ya z-in həqiqi hissəsi, b-yə isə xəyali hissəsi deyilir və belə yazılır: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{İm} z$. $a = 0$ olduqda bi şəklində ədədlər alınır. Belə ədədlərə sırf xəyali ədədlər deyilir. $a = 0$, $b = 0$ olduqda kompleks ədəd sıfra bərabər hesab olunur və tərsinə $a + bi = 0$ olarsa, $a = 0$ və $b = 0$ olur.
Nəticə: $a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədləri üçün
$a + bi = c + di$ bərabərliyi yalnız və yalnız $a = c$, $b = d$ olduqda doğrudur.

Nümunə. $x + 3i = 5 + (x + y)i$ bərabərliyindən x və y-i tapın.
Həlli: Həqiqi və xəyali hissələrin bərabərliyindən alırıq:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 3 = x + y \end{cases}, \text{ yəni } x = 5, y = -2.$$

$a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin cəmi $(a + c) + (b + d)i$ kompleks ədədinə deyilir, yəni $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin hasili $ac - bd + (ad + bc)i$ kompleks ədədinə deyilir, yəni

$$(a + bi)\cdot(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Deməli, iki kompleks ədədi vurmaq üçün onları ikihədlilərin vurulması kimi vurub, $i^2 = -1$ olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

Nümunə. $(3+2i)\cdot(2-i)=3\cdot2-3i+4i-2i^2=6+i-2\cdot(-1)=8+i$

Xüsusi halda xəyali vahidin qüvvətlərinə baxaq:

$i^3=i^2\cdot i=-i$ $\quad i^4=i^2\cdot i^2=1$ $\quad i^5=i^4\cdot i=i$

$i^6=i^4\cdot i^2=-1$ $\quad i^7=i^4\cdot i^3=-i$ $\quad i^8=i^4\cdot i^4=1$

Göründüyü kimi, i-nin natural qüvvətləri yalnız i, -1, $-i$ və 1 ola bilir və bunlar hər dörd addımdan bir təkrarlanır, yəni $i^{4m+k}=(i^4)^m\cdot i^k=i^k$ bərabərliyi doğrudur.

Nümunə. Hesablayın: a) i^{58} b) i^{63}

Həlli: a) $i^{58}=i^{4\cdot14+2}=i^2=-1$ b) $i^{63}=i^{4\cdot15+3}=i^3=-i$

$a-bi$ ədədinə $a+bi$ ədədinin qoşması deyilir və $\overline{z}=a-bi$ kimi işarə edilir. Aydındır ki, $a-bi$ ədədi $a+bi$ ədədinin qoşmasıdırsa, $a+bi$ ədədi də $a-bi$ ədədinin qoşmasıdır. Ona görə də $z=a+bi$ və $\overline{z}=a-bi$ ədədlərinə qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlər deyilir. Qarşılıqlı qoşma ədədlərin həqiqi hissələri bərabərdir, xəyali hissələri isə əksdir.

Qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlərin hasili həqiqi ədəddir:

$$\overline{z}\cdot z=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-abi+abi-(bi)^2=a^2+b^2.$$

Xüsusi halda həqiqi ədədin qoşması özünə, xəyali ədədin qoşması isə onun (-1) ilə hasilinə bərabərdir.

Hər bir $z=a+bi$ kompleks ədədinin əksi olan $-z$ kompleks ədədi var və $-z=-a-bi$. Hər bir sıfırdan fərqli $z=a+bi$ kompleks ədədinin tərsi var.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

surət və məxrəci
$(a-bi)$-yə vurulur

Kompleks ədədlərin çıxılması və bölünməsi aşağıdakı bərabərliklərlə təyin ounur:

$$z-w=z+(-w)$$

$$\frac{z}{w}=z\cdot\frac{1}{w}\ (w\neq0)$$

Kompleks ədədlərin nisbətini tapmaq üçün surət və məxrəci məxrəcin qoşmasına vurmaq əlverişlidir.

Nümunə. $z_1=3+2i$ və $z_2=2-i$ ədədlərinin fərqini və nisbətini tapın.

Həlli: $z_1-z_2=(3+2i)-(2-i)=1+3i$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}=\frac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2}=\frac{6+7i-2}{5}=\frac{4+7i}{5}=$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i=0{,}8+1{,}4i$$

Həqiqi ədədlər üzərində aparılan hesab əməllərinin əsas xassələri kompleks ədədlər üçün də doğrudur. Nəticə olaraq alınq ki, istənilən cəbri eynilik kompleks ədədlər çoxluğunda da doğrudur. Məsələn, z və w kompleks ədədlər olduqda da

$(z\pm w)^2=z^2\pm2zw+w^2$

$(z+w)(z-w)=z^2-w^2$ və s. eynilikləri doğrudur.

Kompleks ədədin kvadrat kökləri

Kvadratı z-ə bərabər olan ədədə z kompleks ədədinin kvadrat kökü deyilir və $\sqrt{z}$ kimi işarə olunur.

Nümunə. $3-4i$ kompleks ədədinin kvadrat kökünü tapın.

Həlli: $\sqrt{3-4i}=x+yi$ olsun.

Bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək:

$$3-4i=(x+yi)^2$$
$$3-4i=x^2-y^2+2xyi$$

Həqiqi və xəyali hissələrin bərabərliyindən alırıq:

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-2 \end{cases}$$

Buradan $(2;-1)$ və $(-2;1)$ həllərini alırıq. Deməli, $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$

Kompleks ədədin həndəsi təsviri

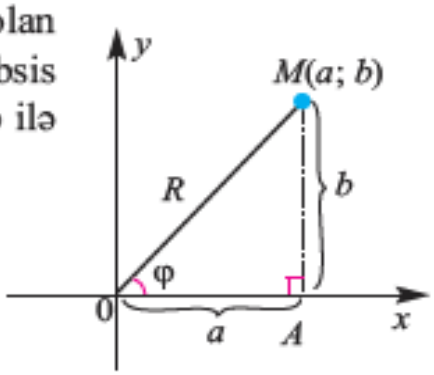
$z=a+bi$ kompleks ədədi $(a;b)$ həqiqi ədədlər cütünün vasitəsilə verilir və bu ədədlər cütü koordinat müstəvisində müəyyən nöqtəyə uyğundur.

$z=a+bi$ ədədinə $A(a;b)$ nöqtəsini qarşı qoyaq və $A(z)$ kimi işarə edək. Koordinat müstəvisinin hər bir nöqtəsi bir kompleks ədədi təsvir edir və tərsinə, hər bir kompleks ədəd koordinat müstəvisində bir nöqtəyə uyğundur.

Həqiqi ədədlərə uyğun olan nöqtələr absis oxu üzərində, sırf xəyali ədədlərə uyğun nöqtələr ordinat oxu üzərində yerləşir. Ona görə absis oxuna həqiqi ox, ordinat oxuna xəyali ox, koordinat müstəvisinə kompleks müstəvi deyilir.

Kompleks ədədin modulu və arqumenti. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli

Müstəvi üzərində $z=a+bi$ kompleks ədədinə uyğun olan nöqtə $M(a;b)$ olsun. OM məsafəsini R, OM şüasının absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı φ ilə işarə edək .



ΔOMA-dan Pifaqor teoreminə görə alırıq:

$$R^2=a^2+b^2$$

Buradan $$R=\sqrt{a^2+b^2}$$

Kompleks ədədə uyğun nöqtədən koordinat başlanğıcına qədər məsafəyə kompleks ədədin modulu deyilir və $|z|$ kimi işarə olunur:

$$|z|=R=\sqrt{a^2+b^2}$$

Son tərəfi OM şüası olan φ dönmə bucağına $z=a+bi$ kompleks ədədinin arqumenti deyilir.

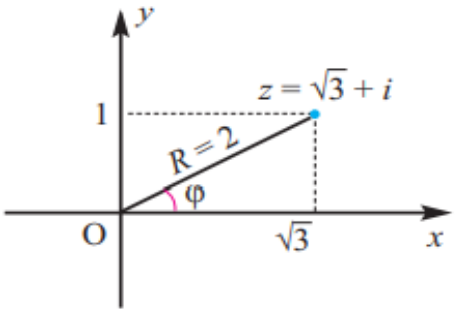
ΔOMA-dan: $\cos\varphi=\dfrac{a}{R}$ $\sin\varphi=\dfrac{b}{R}$ $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$

Verilmiş $z = a + bi$ ədədinin modulu birqiymətli təyin olunur, φ arqumenti isə 2π dəqiqliyi ilə tapılır. Yəni, arqumentin qiymətlərindən biri φ-dirsə, digər qiymətləri $\varphi + 2\pi k$ $(k \in Z)$ şəklindədir.
Kompleks ədədin arqumenti olaraq, adətən $[0; 2\pi)$ aralığına düşən bucağı götürəcəyik.

Nümunə 1. $z = \sqrt{3} + i$ kompleks ədədinin modulunu və arqumentini tapın.

Həlli: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ olduğundan

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$



$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğunu və φ bucağının I rübdə yerləşdiyini nəzərə almaqla $\varphi = \frac{\pi}{6}$ tapılır.

$\cos \varphi = \frac{a}{R}$, $\sin \varphi = \frac{b}{R}$ düsturlarından alırıq:

$$a = R \cos \varphi, \; b = R \sin \varphi$$

Onda $\quad z = a + bi = R \cos \varphi + i \cdot R \sin \varphi = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

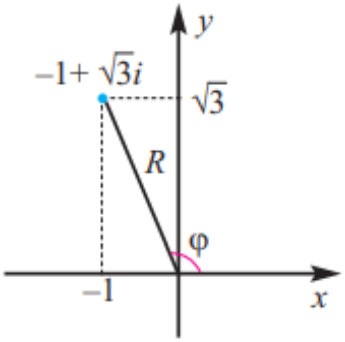
$z = a + bi$ kompleks ədədinin $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ yazılışına onun triqonometrik şəkli deyilir.

Nümunə 2. $z = -1 + \sqrt{3}i$ kompleks ədədini triqonometrik şəkildə yazın.

Həlli:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



φ bucağı II rübün bucağı olduğundan:

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər

Triqonometrik şəkildə verilmiş $z_1 = R_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ və $z_2 = R_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ kompleks ədədlərinin hasilini tapaq.

$z_1 \cdot z_2 = R_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot R_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = R_1 \cdot R_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 +$
$+ i \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)) = R_1 \cdot R_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Triqonometrik şəkildə verilmiş iki kompleks ədədin hasilini taparkən, bu ədədlərin modulları vurulur, arqumentləri toplanır.

Nisbətin modulu bölünən və bölənin modulları nisbətinə, arqumenti isə bölünən və bölənin arqumentləri fərqinə bərabərdir.

Kompleks ədədin n-ci dərəcədən natural üstlü qüvvətinin modulu əsasın modulunun n-ci qüvvətinə, bu qüvvətin arqumenti isə əsasın arqumentinin n mislinə bərabərdir.

Kompleks ədədin n-ci dərəcədən kökləri

z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən kökü elə w ədədinə deyilir ki, $w^n = z$.

Əgər $z \neq 0$ olarsa, n-ci dərəcədən kökün n sayda müxtəlif qiymətləri olur.

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ şəklində yazaq.}$$

$w^n = z$ olduğuna görə alırıq:

$$z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

İki kompleks ədədin bərabərliyinə görə alırıq:

$$r^n = R, \quad r = \sqrt[n]{R}$$

$$n\theta = \varphi + 2\pi k \qquad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \ (k \in Z)$$

$k > n$ olduqda alınan qiymətlər ilk n sayda alınan qiymətlərdən 2π ilə fərqlənir.

Ona görə $\theta_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ olmalıdır.

Kompleks ədədin n-ci dərəcədən kökü düsturu

Əgər $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ olarsa,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \text{ burada } (k = 0, 1, ..., (n-1))$$

Mövzu 29
Külliyat və seçim. Təsadüfi seçim və növləri. Məlumatın təqdimi. Binomial açılışlar.

Statistika və ehtimala aid əsas anlayışlar müasir dünyada prosesləri daha düzgün qiymətləndirməyə kömək edir. Hər iki sahədə araşdırma aparılarkən obyekti əhatə edən külliyyat və külliyatdan seçilmiş nümunələrə və ya qısaca olaraq seçim adlanan kiçik qruplar əsas götürülür. Statistikada seçilmiş nümunə əsasında aparılmış tədqiqata görə külliyyat haqqında fikir yürüdülür. Ehtimalda külliyyata görə seçilmiş nümunə haqqında fikir yürüdülür.

Statistik sorğular apararkən nümunələr adətən təsadüfi seçimlərlə formalaşdırılır. Bu halda külliyyata daxil olan hər bir nümunənin seçim şansı eyni olur. Təsadüfi seçim texnikaları da müxtəlif olur.

- Sadə təsadüfi seçim
- Sistematik təsadüfi seçim
- Klaster təsadüfi seçim
- Təbəqəli təsadüfi seçim

Sadə təsadüfi seçim. Tutaq ki, sinifdə üç nəfərlik qrup yaratmaq lazımdır. Bunun üçün bütün şagirdlərin adları yazılmış kartlar qutuya yığılır və təsadüfi olaraq üç nəfərin adı çıxarılır. Bu halda bütün üçlük qrupların seçilmə şansları eyni olur.

Sadə təsadüfi seçimdə n elementli seçimin hər bir elementinin seçilmə şansı eynidir.

Sistematik seçim. Tutaq ki, böyük ticarət mərkəzinin rəhbərliyi alıcıların mərkəzdə təxminən nə qədər vaxt keçirdiyi haqqında məlumat toplamaq fikrindədir. Gün ərzində mərkəzə gələnlərin sayının təxminən 2000 nəfər olduğu araşdırılmış və onların 5%-nin (yəni 100 nəfərin) nümunə olaraq seçilməsi qərara alınmışdır. Bu şəxslər necə seçilsə, daha düzgün olardı? Bu şəxslərin seçimi gün ərzində mərkəzə gələnlərin hər 20 nəfərindən birinin fikrinin soruşulması ilə aparıla bilər. Məsələn, ilk 20 nəfərdən 16-cı şəxsin fikri soruşulmuşsa, daha sonra, 36-cı, 56-cı və s. şəxslərin fikri soruşulacaq. Bu cür seçim sistematık seçim adlanır.

Sistematik seçimdə əgər $k\%$ seçim nəzərdə tutulmuşdursa, külliyyatın hər $[\frac{100}{k}]$-cı elementindən istifadə edilir.

Klaster seçim. Hər birində 15 detal olan 1000 qutu detalın keyfiyyəti haqqında məlumat vermək tələb olunur. Bunun üçün 300 detalın keyfiyyətinin yoxlanılması qərara alınmışdır (5%-nin). Bütün detalları qutulardan çıxarmaq, onları qarışdırmaq və təsadüfi seçmə ilə 300-nü ayırmaq çox vaxt və xərc tələb edir. 1000 qutudan təsadüfi seçmə ilə 20-sini seçib, bu qutulardakı detalları yoxlamaqla bütün detallar haqqında fikir yürütmək olar. Burada hər qutu bir klasterdir. Bu cür seçimlər **klaster seçim** adlanır. Düzgün statistik məlumat əldə etmək üçün hər seçilmiş klasterə daxil olan bütün elementlər yoxlanılmalıdır.

Klaster ilə seçimdə kulliyyat klasterlərdən ibarət olur. Klasterlərdən təsadüfi seçim aparılır və seçilən klasterin bütün elementləri araşdırılır.

Təbəqəli seçim. Tutaq ki, məktəbdə "Dərsdən sonra məktəb kitabxanasında oturub bədii ədəbiyyat oxumaq istərdinizmi?" sualı ilə şagirdlər arasında araşdırma aparmaq planlaşdırılır. Bu sorğunun məktəbin həyətindəki təsadüfi seçilmiş şagirdlərlə aparılması məqsədəuyğun deyil. Çünki fikri soruşulan şagirdlər eyni sinifdən ola bilər və s. Sorğu hər yaş qrupundan olmaqla təsadüfi seçilmiş şagirdlər arasında aparılmalıdır. Bu cür təsadüfi seçim **təbəqəli (laylı, qruplu) seçim** adlanır. Əgər məktəbdə bu siniflərdə 1265 şagird varsa, onlardan 385 nəfəri 8-ci, 350 nəfəri 9-cu, 280 nəfəri 10-cu, 250 nəfəri 11-ci sinif şagirdi olarsa və 10 % təsadüfi seçilmiş şagirdin fikri öyrəniləcəksə, hər sinifdən təsadüfi seçmə ilə şagirdlərin 10%-nin fikri öyrənilməlidir. Bunların 39-nun 8-ci, 35-nin 9-cu, 28-nin 10-cu, 25-nin 11-ci sinifdən təsadüfi seçilmiş şagirdlər olması məqəsədəuyğundur.

Təbəqəli seçimdə əvvəlcə külliyat təbəqələrə ayrılır, sonra hər təbəqədən təsadüfi seçimlər aparılır.

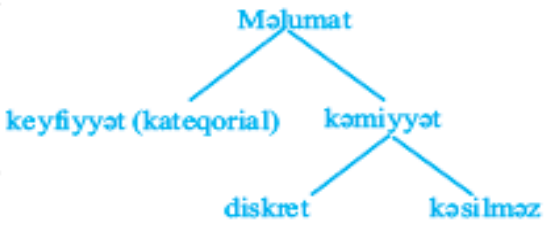
Bəzən araşdırma üçün təsadüfi seçimlər aparmaq mümkün olmur. Məsələn, dietoloqlar hər hansı diet menyusunu təsadüfi seçimlə deyil, könüllü olaraq iştirak etmək istəyənlər arasından seçməli olurlar.

Doğru seçim, səhv seçim

Sorğu aparan təşkilatlar mövzuya aidiyyatı olan hər bir şəxsin fikrini öyrənmək üçün maddi və texniki imkanlara malik olmurlar. Bu səbəbdən də kiçik qrupların fikrini öyrənməklə kifayətlənməli olurlar. Sorğuda iştirak edənlərin düzgün müəyyən edilməsinin əhəmiyyəti böyükdür. Məsələn, idman mərkəzinə gələn şəxslərə görə bütün şəhər əhalisinin həftədə neçə dəfə idmanla məşğul olduqları haqqında doğru fikir yürütmək mümkün deyil. Yaxud da hər hansı şəxsin parlamentin üzvü seçiləcəyi haqqında onun işlədiyi kollektivdə və ya yaşadığı ərazidə araşdırma aparmaqla fikir yürütmək səhv proqnozla nəticələnər.

Məlumatın təqdimi

Statistik məlumatlar kəmiyyət və keyfiyyət xarakterli olmaqla iki qrupa bölünür. **Kəmiyyət tipli məlumatlar** ədədi qiymətlərlə ifadə edilir.
Məsələn, "Neçə saat idmanla məşğul olur", "Boyları nə qədərdir" və s.



Keyfiyyət tipli məlumatlar isə kateqoriyalara ayrılır. Bu məlumatlara **kateqorial məlumatlar** da deyilir. Məsələn, "partiyaların adı", "gözünün rəngi", "avtomobilin markası" və s.

Kəmiyyət tipli məlumatlar - ədədi məlumatlar özləri də iki növə ayrılır:
a) diskret, kəsilən ədədi məlumatlar; b) kəsilməz ədədi məlumatlar.

Diskret ədədi məlumatlara sayma ilə müəyyən edilən məlumatlar aid edilir. Məsələn, avtobusdakı sərnişinlərin sayı: 1,2,3 və s. qiymətlərini alır.

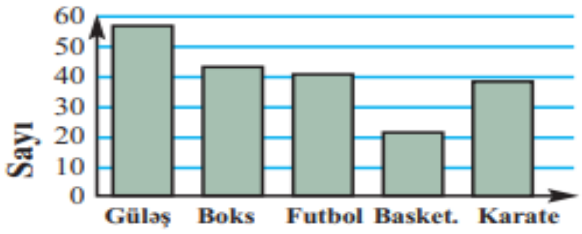
Kəsilməz ədədi məlumatlar müəyyən diapazonda dəyişən qiymətlər alırlar, adətən ölçmənin nəticəsi olaraq yaranır.
Məsələn, yeni doğulmuş körpələrin boyu, kütləsi və s.

Məlumatları təqdim edərkən uyğun qrafik formanın seçilməsi mühümdür. Ona görə də kateqorial və ədədi məlumatları təqdim edərkən düzgün qrafik forma seçilməlidir.

Kateqorial məlumat üçün məqsədəuygun təqdimat formaları

Nümunə 1. 200 şagird arasında hansı idman növünün daha çox sevildiyi haqqında araşdırma aparılmışdır. Burada araşdırma idman növünə aid olduğu üçün məlumat kateqorialdır. Məktəbdə adları məlum olan idman bölmələri mövcuddur. Kateqorial məlumatı təqdim etmək üçün əlverişli forma tezlik cədvəli, barqraf, dairəvi qrafik ola bilər.

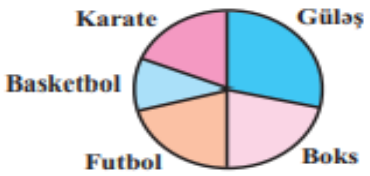
Barqraf



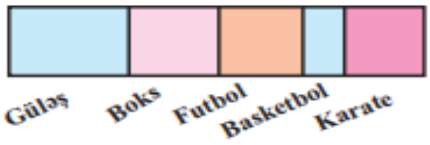
Tezlik cədvəli

İdman növü	Tezlik
Güləş	57
Boks	43
Futbol	41
Basketbol	21
Karate	38
Cəmi	200

Dairəvi diaqram



Seqmentli barqraf



Hər kateqoriyanın ümuminin (vahid qəbul edilmiş) hansı hissəsini təşkil etdiyi müəyyənləşdirilir. Vahid bu hissələrə - seqmentlərə bölünür

Ədədi məlumatları təqdim etmək üçün məqsədəuygun formalar

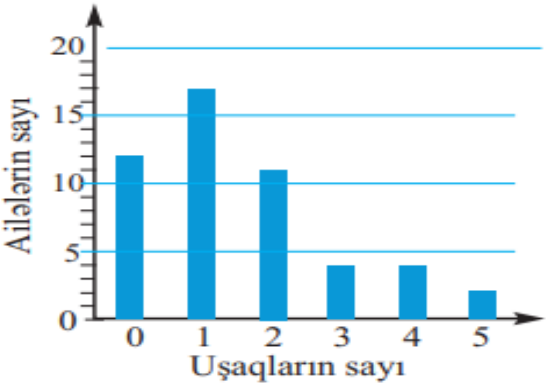
Diskret ədədi məlumatlar. Məhdud sayda diskret ədədi məlumatları təqdim etmək üçün **tezlik cədvəli, barqraf, histoqram və gövdə-budaq** kimi təqdimat formalarından istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Nümunə 2. 50 gənc ailə arasında uşaqlarının sayı barədə sorğu keçirilmişdir. Cavablar aşağıdakı kimi olmuşdur.

0 1 2 1 0	3 1 4 2 0	1 2 1 0 5	1 2 1 0 0	1 2 1 2 1
0 1 4 1 0	1 2 5 0 4	1 2 3 0 0	1 2 1 3 4	2 3 2 1 0

Yuxarıdakı ədədlər hər bir ailədəki uşaqların sayını göstərir. Sorğunun nəticələri aşağıdakı kimi tezlik cədvəli və ya barqraf ilə təqdim edilə bilər.

Uşaq-ların sayı	Ailələrin sayı (tellə)	Tezlik (ailələrin sayı)	Nisbi tezlik
0	𝍸 𝍸 ||	12	12 : 50 = 0,24
1	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17	17 : 50 = 0,34
2	𝍸 𝍸 |	11	11 : 50 = 0,22
3	||||	4	4 : 50 = 0,08
4	||||	4	4 : 50 = 0,08
5	||	2	2 : 50 = 0,04



Qruplaşdırılmış diskret ədədi məlumatlar. Histoqram

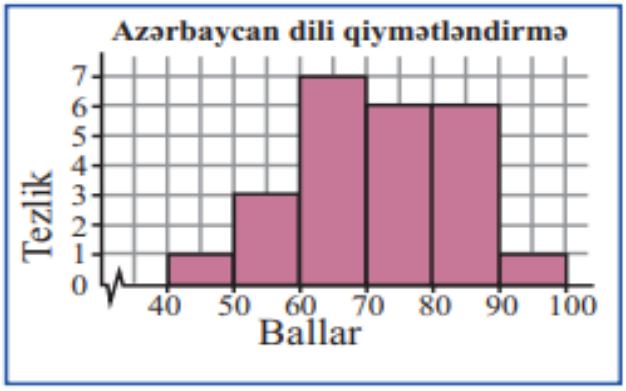
Nümunə 3. Aşağıda Azərbaycan dili fənni üzrə qiymətləndirmədən şagirdlərin topladıqları ballar (100 ballıq sistem üzrə) verilmişdir.

52 66 75 80 52 48 95 85 84 68 86 82 63 78 75 64 79 81 66 53 76 75 69 65

Ədədi məlumatın dəyişmə diapazonu 48-95 kimidir. Məlumatı hər sinfin ölçüsü 10 olmaqla 6 sinifdə qruplaşdırmaq olar: 40-50, 50-60, 60-70, 70-80, 80-90, 90-100. Məlumata uyğun tezlik cədvəli və histoqram aşağıdakı kimi olacaq.

Azərbaycan dili qiymətləndirmə

Siniflər	Tel	Tezlik
[40, 50)	|	1
[50, 60)	|||	3
[60, 70)	𝍸 ||	7
[70, 80)	𝍸 |	6
[80, 90)	𝍸 |	6
[90, 100)	|	1



Binomial açılışlar

Binom ikihədli deməkdir.Binomun müxtəlf qüvvətlərinə baxaq. İki ədəd cəminin kvadratı və kubunun açılışlarında müəyyən qanunauyğunluq var.

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Belə ki, birinci həddin qüvvət üstü binomun dərəcəsinə bərabərdir, hər sonrakı həddə a-nin üstü bir vahid azalır, ikinci həddin (b-nin) üstü bir vahid artır. Birinci və sonuncu həddin əmsalı 1-dir.

a və b cəminin qüvvətləri ardıcıllığını binomial açılışların ardıcıllığı kimi davam etdirmək olar. Bu açılışların hansı qayda ilə yarandığını nəzərdən keçirək.

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ kimi yazmaq olar.

Bu hasil hər biri a və ya b olan dörd vuruğun bütün mümkün hasillərinin cəminə bərabərdir. Bu variantları ardıcıl olaraq nəzərdən keçirək.

- b həddini 0 vuruq, a həddini 4 vuruq götürsək, a^4 həddi alınır və bu cür ${}_4C_0$ və ya 1 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 1-dir.
- b həddini 1 vuruq, a həddini 3 vuruq götürsək, a^3b həddi alınır və bu cür ${}_4C_1$ və ya 4 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 4-dür.
- b həddini 2 vuruq, a həddini 2 vuruq götürsək, a^2b^2 həddi alınır və bu cür ${}_4C_2$ və ya 6 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 6-dır.
- b həddini 3 vuruq, a həddini 1 vuruq götürsək, ab^3 həddi alınır və bu cür ${}_4C_3$ və ya 4 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 4-dür.
- b həddini 4 vuruq, a həddini 0 vuruq götürsək, b^4 həddi alınır və bu cür ${}_4C_4$ və ya 1 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 1-dir.

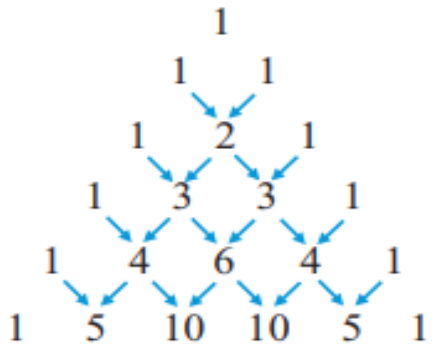
Binomun qüvvətlərini, binomial açılışları və hədlərin əmsallarını cədvəldə yerləşdirək.

Binom	Binomial ifadələrin açılışı	Paskal üçbucağı
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2$	$1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1

Göründüyü kimi, əmsalların düzülüşü maraqlı riyazi xassələrə malik "üçbucaq" yaradır. Buna Paskal üçbucağı deyilir.

Paskal üçbucağı. Paskal üçbucağı onun yaradıcısı olan və XVI əsrdə yaşamış böyük fransız riyaziyyatçısı, fiziki və filosofu Blez Paskalın şərəfinə adlandırılmışdır. Paskal üçbucağının təpə nöqtələrində 1 dayanır. Üçbucağı təşkil edən bütün sətirlər vahidlə başlanır və vahidlə də qurtarır. Hər sonrakı sətirdəki hər bir ədəd əvvəlki sətirdəki iki qonşu ədədin cəminə bərabərdir. Hər sonrakı sətirdəki ədədlərin sayı özündən əvvəlkindən bir ədəd çoxdur.

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$



Paskal üçbucağı	Paskal üçbucağı kombinizonla
1	${}_0C_0$
1 1	${}_1C_0$ ${}_1C_1$
1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
1 4 6 4 1	${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
1 5 10 10 5 1	${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$

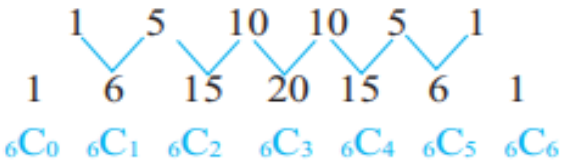
${}_5C_2$-nin həqiqiətən Paskal üçbucağının 5-ci sətrinin uyğun elementi olduğunu yoxlayaq.

$$ {}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2} = 10 $$

Binomun qüvvəti	Açılışı	Paskal üçbucağı
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	${}_1C_0a + {}_1C_1b$	1 1
$(a+b)^2$	${}_2C_0a^2 + {}_2C_1ab + {}_2C_2b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	${}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2y + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	${}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	${}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$	1 5 10 10 5 1

Binomun açılışında hədlərin əmsalları ardıcıl olaraq Paskal üçbucağının uyğun sətrindəki ədədlərdir. Soldan sağa 1-ci həddə a-nın qüvvəti binomun qüvvətinə bərabərdir, hər sonrakı həddə bir vahid azalır, b-nin qüvvəti isə artır.

Paskal üçbucağının növbəti 6-cı sətri aşağıdakı kimi yaranır.



Binomial açılış üçün ümumiləşmiş düstur yaza bilərik.

Binomial açılış

İstənilən a, b ədədləri və $n \geq 0$ ədədi üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + {}_nC_{n-1}\,a^1b^{n-1} + {}_nC_na^0b^n$$

"Σ" ***siqma*** işarəsindən istifadə etməklə bu düsturu qısa şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_ka^{n-k}b^k$$

$(a+b)^n$ binomunun açılışında $n+1$ sayda hədd var. Binomun istənilən $(k+1)$-ci həddi $T_{k+1} = {}_nC_ka^{n-k}b^k$ şəklindədir, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$

Nümunə. $(x+2)^5 = {}_5C_0 \cdot x^5 + {}_5C_1 \cdot x^4 \cdot 2 + {}_5C_2 \cdot x^3 \cdot 2^2 + {}_5C_3 \cdot x^2 \cdot 2^3 + {}_5C_4 \cdot x \cdot 2^4 + {}_5C_5 \cdot 2^5 =$
$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

Bu ayrılışda məsələn, üçüncü toplananın əmsalı 40, onun binomial əmsalı isə ${}_5C_2 = 10$ olur.

Nümunə. $(2p-1)^6$ binomunun açılışında 4-cü həddini yazın.

Həlli: Burada $a = 2p$, $b = -1$, $n = 6$

$T_4 = T_{3+1} = {}_6C_3 \cdot a^{6-3} \cdot b^3 = 20 \cdot (2p)^3 \cdot (-1)^3 = -160p^3$

Mövzu 30
Binomial sınaqlar. Bernulli sınaqları.

Bernulli sınaqları

Bernulli sxemini aydınlaşdırmaq üçün aşağıdakı məsələyə baxaq.

Oyunda qalib gəlmə ehtimalı $\frac{3}{4}$ isə (yaşıl kürənin çıxması), məğlub olmaq (qırmızı kürənin çıxması) ehtimalı $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ olacaq.

4 oyunda qələbə və məğlubiyyət saylarına görə ehtimalları hesablayaq.

1) P(4 oyunun hamısında qalib gəlmə ehtimalı) $= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$

2) P(4 oyunun hamısında məğlub olma ehtimalı) $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

3) 4 oyundan 3-də qalib gəlmə variantları və hər birinin ehtimalı:

(Q,Q,Q,M) P(4-cüdən başqa hamısında qalib) = $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$

(Q,Q,M,Q,) P(3-cüdən başqa hamısında qalib) = $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(Q,M,Q,Q) P(2-cüdən başqa hamısında qalib) = $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(M,Q,Q,Q) P(1-cidən başqa hamısında qalib) = $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

Oyunçunun 4 oyundan 3-də qalıb gəlməsinin mümkün variantlarının sayını kombinizonla da hesablamaq olar. ${}_4C_3=\frac{4!}{3!}=4$ olacaq. Variantların ehtimalı eyni olmaqla $\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1$-ə bərabərdir. Bu hadisənin ehtimalını aşağıdakı kimi hesablamaq olar.

$$P(\text{4 oyunun 3-də qalib}) = {}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{108}{256}$$

Analoji qayda ilə digər sityuasiyaları araşdıraq.

4) 4 oyundan 2-də qalib gəlmə ehtimalı

$$P(Q,Q,M,M) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{256}$$

4 oyundan 2-sində qalib gəlməyin mümkün variantlarının sayı: ${}_4C_2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

Yəni 6 halın hər birində qalib gəlmək ehtimalı $\frac{9}{256}$ -dur.

$$P(\text{4 oyundan 2-də qalib}) = {}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{54}{256}$$

5) 4 oyundan 1-də qalib gəlmə ehtimalı.

$$P(Q,M,M,M) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{256}$$

$$P(\text{4 oyundan 1-i qalib}) = {}_4C_1\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{64}=\frac{12}{256}$$

Biz komandanın 4,3,2,1,0 oyunda qalib gəlmək ehtimallarını tapdıq. Əgər bu ehtimallar düzgün hesablanmışsa, onların cəmi vahidə bərabər olmalıdır.

P(4 uduş) + P(3 uduş) + P(2 uduş)+ P(1 uduş)+ P(0 uduş) = 1

Yoxlayaq: $\frac{81}{256}+\frac{108}{256}+\frac{54}{256}+\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=1$

Bernulli sınaqları

Yuxarıda təsvir olunan məsələ binomial sınaqlar adlanır. Çünki bu cür məsələlərdə situasiyaları uyğun binomial açılışın hədləri ilə ifadə etmək mümkündür. Məsələn, nəzərdən keçirdiyimiz məsələ

$(a+b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$ binomial açılışa uyğundur,

Binomial sınaqlara Bernulli sınağı da deyilir.

Bu açılışı məsələdəki situasiyaya uyğun p (qalib) və q (məğlub) dəyişənləri ilə ifadə etsək, binomial açılışda hər bir həddin real situasiyaya uyğun gəldiyini görmək olar. $(p+q)^4 = {}_4C_0p^4 + {}_4C_1p^3q + {}_4C_2p^2q^2 + {}_4C_3pq^3 + {}_4C_4q^4$

Burada p uğurlu hadisənin (yaşıl çıxma) ehtimalıdır və $p=\frac{3}{4}$, q uğursuz (qırmızı çıxma) hadisənin ehtimalıdır və $q=\frac{1}{4}$.

Bernulli sınağı və ehtimal

n sayda asılı olmayan sınaqda uğurlu hadisənin ehtimalı p olarsa, onda m uğurlu, $n-m$ uğursuz hadisənin ehtimalı

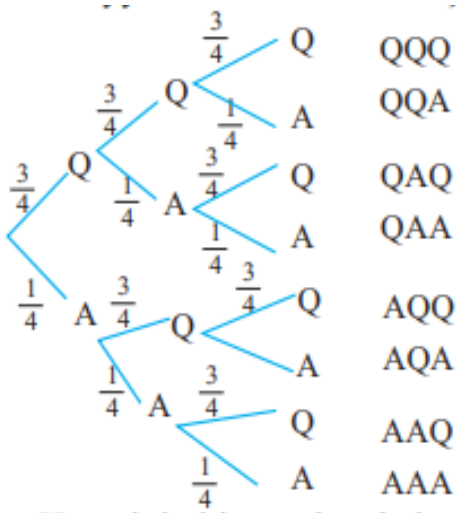
$P(n$ sınaqda, m uğurlu$) = {}_nC_mp^mq^{n-m}$ kimi olacaq.

Binomial sınaq və ya Bernulli sınağı yalnız aşağıdakı şərtlər ödənildikdə doğrudur.

- Hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi var.
- Sınaqların sayı məlumdur.
- Sınaqlar asılı deyil
- Hər sınaq bərabər ehtimallıdır

Bernulli sınağını sxematik olaraq aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraq.

Nümunə 1. Çarx 4 bərabər hissədən ibarətdir. 3 hissəsi qırmızı, bir hissəsi ağ rəngdədir. Çarx fırlandıqdan sonra ya qırmızı hissədə dayanır, ya da ağ. Üç dəfə fırlandıqda mümkün vəziyyətlər sxemlə verilmişdir.



QQQ	3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$		$P(3\text{ qırımızı}) = 1\left(\frac{3}{4}\right)^3$
QQA	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$		$P(2\text{ qırımızı}) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$
QAQ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$		$P(1\text{ qırımızı}) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$
QAA	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$		$P(0\text{ qırımızı}) = 1\left(\frac{1}{4}\right)^3$
AQQ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$		Göründüyü kimi, əmsallar
AQA	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$		Paskal üçbucağının 3-cü
AAQ	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$		sətirindəki ədədlərlə eyni-
AAA	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$		dir: 1 3 3 1

Həmçinin binomal açılışla da əlaqəni görmək mümkündür.
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Burada $a = \frac{1}{4}$ və $b = \frac{3}{4}$ Bu hadisə üçün Bernulli düsturu $P(m\text{ qırmızı}) = {}_3C_m \left(\frac{3}{4}\right)^m\left(\frac{1}{4}\right)^{3-m}$ $m = 0,1,2,3$. m-in qiymətlərini yerinə yazmaqla düsturu yoxlayın.

Nümunə 2. 5 sualın hər birinin 4 cavab variantı verilmişdir. Nərgizin 5 sualdan 4-nə düzgün cavab verməsi ehtimalını hesablayın. Binomun açılışı ilə ehtimalın tapılması arasında əlaqəni araşdırın.

Həlli: Nərgizin 5 suala düzgün və ya səhv cavab verməsinin neçə mümkün variantı olduğunu tapaq.

$(d+s)^5 = {}_5C_0d^5 + {}_5C_1d^4s + {}_5C_2d^3s^2 + {}_5C_3d^2s^3 + {}_5C_4ds^4 + {}_5C_5s^5$

Nərgizin 5 sualdan 4-nə düzgün cavab verməsinin müxtəlif 5 variantı olduğu sxemdən görünür. Deməli, bu hadisənin ehtimalı ${}_5C_1d^4s$ kimi olacaq. Analoji olaraq digər situasiyaların da binomun hədləri arasındakı əlaqəsini görmək olar. Bu əlaqəni cədvəldə ümumiləşdirək.

s	d	d	d	d
d	s	d	d	d
d	d	s	d	d
d	d	d	s	d
d	d	d	d	s

Əmsal	Hədd	Situasiyada mənası
${}_5C_0 = 1$	d^5	5 düzgün cavabın 1 variantı var
${}_5C_1 = 5$	d^4s	4 düzgün 1 səhv cavabın 5 variantı var
${}_5C_2 = 10$	d^3s^2	3 düzgün 2 səhv cavabın 10 variantı var
${}_5C_3 = 10$	d^2s^3	2 düzgün 3 səhv cavabın 10 variantı var
${}_5C_4 = 5$	ds^4	1 düzgün 4 səhv cavabın 5 variantı var
${}_5C_5 = 1$	s^5	5 səhv cavabın 1 variantı var

Təsüdüfi seçmə ilə 4 suala düzgün, 1 suala səhv cavab vermək ehtimalını tapaq. Hər düzgün cavabın ehtimalı $\frac{1}{4}$ -dir. Səhv cavabın ehtimalı $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(4d, 1s) = 5d^4s = 5\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1024} \quad \text{və ya} \approx 1{,}5\%$$

Nümunə 3. Dörd uşaqlı ailədəki uşaqlardan 3-nün oğlan, 1-nin qız olması ehtimalını tapın.

Hər uşaq üçün iki mümkün hal var: ya oğlandır, ya da qız. Hər ikisinin ehtimalı $\frac{1}{2}$-dir. P(n sınaqda, m uğurlu) = ${}_nC_m p^m q^{n-m}$

$n = 4, m = 3, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$; P(4 uşaqdan,3-ü oğlan) = ${}_4C_3 p^3 q^{4-3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Deməli, 4 uşaqdan 3-nün oğlan olması ehtimalı $\frac{1}{4}$ və ya 25%-dir.

Uyğun binomial açılışda situasiyanı ifadə edən hədd qırmızı rənglə göstərilmişdir.

$(o + q)^4 = o^4 + 4o^3q + 6o^2q^2 + 4oq^3 + q^4$ P(4 uşaqdan, 3-ü oğlan)