AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

SUMQAYIT DÖVLƏT UNİVERSİTETİNİN NƏZDİNDƏ

SUMQAYIT DÖVLƏT TEXNİKİ KOLLECİ

Riyaziyyat

fənnindən mühazirələr

Orta ixtisas Təhsil müəssisələrində fənnin tədrisi üçün nəzərdə tutulub

SUMQAYIT-2020

Mövzuların adları

1. Matris. Matrislər üzərində əməllər.
2. Matrisin determinantı. Determinantın əsas xassələri.
3. Tərs matris. Matrisin ranqı. Minor və cəbri tamamlayıcı.
4. Xətti tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli.
5. Kramer qaydası. Kramer qaydasının xətti tənliklər sisteminin həllinə tətbiqi. Xətti tənliklər siseminin Qauss üsulu ilə həlli.
6. Vektorlar üzərində əməllər.
7. Iki vektorun skalyar hasili, vektorial hasili, qarışıq hasili və onların xassələri.
8. Funksiyanın törəməsi. Törəmənin həndəsi və mexaniki mənası.
9. Cəmin, hasilin və nisbətin törəməsi.
10. Mürəkkəb və tərs funksiyaların törəməsi.
11. Elementar funksiyaların törəməsi.
12. Funksiyanın diferensialı. Diferensialın həndəsi və mexaniki mənası. Laqranj teoremi və Koşi teorimi.
13. Qeyri –müəyyən inteqral,əsas xassələri, cədvəl inteqralları.
14. Qeyri –müəyyən inteqral dəyişəni əvəzetmə üsulu, hissə-hissə inteqrallama üsulu.
15. Müəyyən inteqral, əsas xassələri.
16. Müəyyən inteqralın hesablanma üsulları. Nyuton-Leybnis düsturu.
17. Müəyyən inteqralın tətbiqləri. (müstəvi fiqurların sahəsinin hesablanması, əyrixətli sektorun sahəsi, əyri qövsünnün uzunluğu)
18. Cisimlərin həcminin hesablanması, fırlanmadan alınan səthin sahəsi, işin müəyyən inteqral vasitəsilə hesablanması.
19. Adi diferensial tənliklər haqqında əsas anlayışlar. Birtərtibli diferensial tənliklər. Dəyişənlərinə ayrılan tənliklər.
20. Bircinsli diferensal tənliklər. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər.
21. İkitərtibli diferensial tənliklər.
22. Ehtimalın klassik tərifi. Təsadüfi hadisə haqqında anlayış. Şərti ehtimal. Tam ehtimal və Bayes düsturları.
23. Təsadüfi kəmiyyətin paylama funksiyası. Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası. Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi.

Matris .Matrisin tərifi. Matirslər üzərində əməllər

Tutaq ki, m və n natural ədədlərdir. mn sayda ədəddən düzbucaqlı şəklində düzəldilmiş, m sayda sətri və n sayda sütunu olan cədvələ (mxn)-ölçülü matris deyilir. Matrisi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

və ya

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bəzən qisa olmaq üçün matirisi böyük hərflərlə (A,B,C,X,Y,...) və ya $\|a_{ij}\|$ (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) şəklində işarə edirlər.

Matrisi təşkil edən a_{ij} ədədlərinə matrisin elementləri deyilir.Elementin aşağısında yazılan iki indeksin birincisi yeni i onun yerləşdiyi sətrin nömrəsini,ikincisi yəni j isə yerləşdiyi sütunun nömrəsini göstərir.

(mxn) –ölçülü (1) matrisinin sətir və sütunlarının sayı bərabər yəni m=n olduqda,ona kvadrat matris deyilir.Bu halda n ədədinə kvadrat matrisin tərtibi deyilir.

Məsələn $A = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix}$ matrisi ikitərtibli matrisdir.

$B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$ matirisi isə üçtərtiblidir.

Bir elementdən ibarət olan matrisə birtərtibli matris deyilir. Birtərtibli matrisi onu təşkil edən yeganə ədədlə eyniləşdirirlər. Yəni $\|a_{11}\| = a_{11}$.

Ancaq bir sətri olan matrisə sətir matris ,ancaq bir sütunu olan matrisə sütun matris deyilir. Məsələn:

$A = \|2, 7, 8, 9\|$, $B = \|a, b, c\|$ matrisləri sətir matrislərdir.

$C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Vmatrix}$ matrisləri isə sütun matrislərdir.

n tərtibli kvadrat matris:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad (2)$$

n tərtibli kvadrat matrisinin yuxarı küncündə olan a_{11} elementi ilə sağ aşağı küncündə olan a_{nn} elementini birləşdirən düz xətt parçası üzərində yerləşən a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} elementləri çoxluğu həmin matrisin baş diaqanalı adlanır.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Yalnız baş diaqanalının elementləri sıfırdan fərqli olan kvadrat matrisə diaqanal matris deyilir.

Bütün elementləri vahidə bərabər olan diaqanal matris vahid matris adlanır və I_n ilə işarə olunur.

Birtərtibli vahid matris $I_n = \|1\|$ şəklindədir.

İkitərtibli vahid matris: $I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

Üçtərtibli vahid matris: $I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ və s.

Bütün elementləri sıfra bərabər olan kvadrat matrisə sıfır matris deyilir və O ilə işarə olunur. Məsələn:

$O = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$-ikitərtibli sıfır matris.

$O = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$-üçtərtibli sıfır matris.

Matrisin çevrilməsi.

Verilmiş A matrisinin bütün sətr və sütunlarının yerinin dəyişilməsinə həmin matrisin çevrilməsi və ya transponirə edilməsi deyilir və A^* ilə işarə olunur. Məsələn:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{Vmatrix}^* = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix} \; ; \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -7 \end{Vmatrix}^* = \begin{Vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -7 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}^* = \|-3 \quad 0 \quad -1\|.$$

Aydındır ki, $(A^*)^* = A$ olar.

A=A* olduqda A matrisinə simmetrik matris deyilir.

A=$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$ matrisinin simmetrik olması şərtini a_{ij}=a_{ji} (i,j=1,2,...,n)

kimi yazmaq olar.

a_{ij}=-a_{ji} olduqda A matrisinə çəpsimmetrik matris deyilir.

Bütün elementləri həqiqi ədədlər olan matrisə həqiqi matris deyilir.

Heç olmasa bir elementi kompleks ədəd olan matrisə isə kompleks matris deyilir.

Eyni ölçülü və bütün uyğun elementləri bərabər olan matrislərə bərabər matrislər deyilir.

Matrislər üzərində əməllər.

Eyni (mxn) –ölçülü $A = \|a_{ij}\|$ və $B = \|b_{ij}\|$ (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) matrislərinin cəmi həmin ölçülü və hədləri

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n) \qquad (1)$$

kimi təyin olunan $C = c_{ij}$ $(i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$ matrisinə deyilir və C=A+B ilə işarə olunur. matrislərin toplanması yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrinə malikdir, yəni eyniölçülü A, B və C matrisləri üçün

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

münasibətləri doğrudur. Eyniölçülü A matrisi və O sıfır matrisi üçün həmişə $A + O = A$ münasibəti doğrudur.

Xüsusi halda

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{Vmatrix}$$

İki matrisin hasili:

(mxn) ölçülü A=(a_{ij}) (i=1,2,...,m;j=1,2,...,n) matrisinin (nxp) ölçülü B=(b_{ij}) (i=1,2,...,n;j=1,2,...p) matrisinə hasili hədləri $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ (i=1,2,...,m;j=1,2,...,p) matrisinə deyilir və C=A·B ilə işarə olunur. İstənilən ölçülü iki matrisi vurmaq olmaz. A matrisini o vaxt B matrisinə vurmaq olarki A-nın sütunlarının sayı B-nin sətrlərinin sayına bərabər olsun.

Xüsusi halda:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ olarsa

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

Məsələn: A matrisi (mxn) ölçülü , B matrisi (nxp) ölçülü olduqda A·B matrisi (mxp) ölçülü matris olar.

Misal:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ olarsa A·B hasilini tapın.

Həlli:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 13 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrislərin hasilinin bir sıra başqa xassələri də vardır. Məsələn, ixtiyari *A, B, C* matrisləri və həqiqi λ ədədi üçün

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB),$$

$$(A+B)C = AS + BC,$$

$$C(A+B) = SA + CB,$$

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

bərabərlikləri doğrudur.

Determinantlar və onların xassələri

Ikitərtibli $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin elementlərindən düzəldilmiş

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ fərqinə ikitərtibli determinant və ya verilmiş matrisin determinantı deyilir və D_A, $\Delta(A)$, detA, $|A|$ kimi simvollardan biri ilə işarə edilir.

$$\boldsymbol{D_A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

a_{11}, a_{22} elementlərinə determinantın baş diaqanal , a_{12}, a_{21} elementlərinə isə yan diaqonal elementləri deyilir. İkitərtibli A matrisinin determinantını hesablamaq üçün baş diaqonal elementlərinin hasilindən yan diaqonal elementlərinin hasilini çıxmaq lazımdır.

Məsələn: $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16$

Üçtərtibli A=$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ matrisinin elementlərindən düzəldilmiş

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ ifadəsinə üçtərtibli deerminant deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Tərifə əsasən aşağıdakını yaza bilərik:

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

(2)

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\ .$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki ifadəyə determinantın açılışı və ya qiyməti deyilir.Üçtərtibli determinantın hesablanma qaydasını aşağıdakı sxemdən almaq olar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu qayda üçtərtibli determinantları hesablamaq üçün üçbucaq qaydası adlanır.

Məslən:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 - 4 - 0 + 16 + 6 = 22.$$

Indi isə n tərtibli $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **(3)** matrisin determinantın hesablayaq.

Determinantın hər hansı elementinin yerləşdiyi sətir və sütun üzərindən düz xəttlər çəkdikdə yerdə qalan elementlər tərtibi verilmiş determinantın tərtibindən bir vahid az olan determinant əmələ gətirir.Bu determinanta kəsişmədə duran uyğun elementin **minoru** deyilir.a_{ij} elementinin minoru M_{ij} ilə işarə olunur. M_{ij} minorunun $(-1)^{i+j}$ vuruğu ilə hasilinə a_{ij} elementinin **cəbri tamamlayıcısı** deyilir və $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ilə işarə olunur.

Üçtərtibli $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **(4)** determinantının a_{13} və a_{23} elementlərinin

minoru uyğun olaraq $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ v $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Cəbri tamamlayıcısı isə $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$=-$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ olar.

(3) matrisinin birinci sətir elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcıları $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1n}$ olsun.

Tərif.$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$ kimi təyin olunan ədədə n tərtibli matrisin n tərtibli determinantı deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \qquad \textbf{(5)}$$

Determinantın xassələri

1. Determinantın uyğun sətirləri ilə sütunlarının yerini dəyişdikdə onun qiyməti dəyişməz.
2. Determinantın iki sətrinin və ya iki sütunun bir-biri ilə yerini dəyişdikdə,onun ancaq işarəsi dəyişər.
3. İki sətri və ya iki sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

4. Determinantın hər hansı bir sətrinin və ya sütunun bütün elementlərinin ortaq vuruğunu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.
5. Determinantın mütənasib olan sətrləri və ya sütunları varsa,bu determinantın qiyməti sıfra bərabərdir.
6. Determinantın hər hansı bir sətir və ya sütununun bütün elementləri sıfra bərabərdirsə,bu determinantın qiyməti sıfra bərabərdir.
7. Determinantın hər hansı bir sətrinin bütün elementləri iki ədədin cəmi kimi verildikdə,həmin determinant iki determinantın cəminə bərabər olar,bu determinantların birində həmin sətir elementləri olaraq birinci toplananlar,o birində isə həmin sətir elementləri olaraq ikinci toplananlar götürülür.
8. Determinantın hər hansı sətrinin və ya sütunun bütün elementlərini bir ədədə vurub,digər bir sətir və ya sütun üzərinə əlavə etsək,determinantın qiyməti dəyişməz.

Tərs matris

Tutaq ki, A hər hansı tərtibli kvadrat matris və I həmin tərtibli vahid matrisdir. Bu halda AB=BA=I bərabərliyini ödəyən kvadrat B matrisinə A matrisinin ***tərs*** matrisi deyilir və $B=A^{-1}$ ilə işarə olunur.

Teorem: Kvadrat A matrisinin tərs matrisi olması üçün onun determinantının sıfırdan fərqli olması zəruri və kafidir.

n tərtibli kvadrat matrisin tərs matrisi $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

düsturu ilə tapılır.

Burada A_{ij} (i,j=1,2,...,n) ilə A matrisinə uyğun determinantın a_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısı işarə olunmuşdur. Determinantı sıfra bərabər olan matrisə ***cırlaşmış*** matris,determinantı sıfırdan fərqli olan matrisə ***cırlaşmamış*** matris deyilir.

Misal: $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ matrisinin tərs matrisini tapın.

Həlli: $\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{4+0+0-0-1-12=-9 \neq 0}$ olduğuna görə,A matrisi cırlaşmayandır və onun A^{-1} tərs matrisi var:

$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ düsturuna əsasən tərs matrisi tapaq.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 \ ; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ ; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Olduğundan

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Bəzi hallarda tərs matrisi tapmaq üçün matrisin elementar çevirmələrinə əsaslanan aşağıdakı üsuldan istifadə olunur.

a) Matrisin sətirlərinin (sütunlarının) yerini dəyişmək.
b) Matrisin sətrini (sütununu) sıfırdan fərqli ixtiyari ədədə vurmaq və ya bölmək.
c) Matrisin hər hansı bir sətrini (sütununu) bir ədədə vurub başqa bir sətrin (sütunun) üzərinə əlavə etmək lazımdır.

n tərtibli A matrisinin tərs matrisini tapmaq üçün onun sağ tərəfində I vahid matrisi yazılaraq alınan düzbucaqlı matrisin yalnız sətirləri üzərində elementar çevirmələr aparmaqla A-nın yerində I vahid matris alınmasına nail olurlar. Bu zaman I matrisinin yerində alınan yeni matris A-nın tərs matrisi olur.

Misal: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin tərsini elementar çevirmə vasitəsilə tapın.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisin ranqı.

Tutaq ki,(mxn) ölçülü

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisi verilmişdir. Bu matrisin k≤min(mxn) şərtini ödəyən ixtiyari k sayda sətri ilə k sayda sütununun kəsişməsində duran elementlərindən düzəldilmiş k tərtibli determinanta A matrisinin k tərtibli minoru deyilir.

Tərif: A matrisinin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunun tərtibinə bu matrisin **ranqı** deyilir.

A matrisinin ranqı ranqA=r(A) kimi işarə olunur və 0≤r(A)≤min(mxn) bərabərsizliyini ödəyir. Matrisin ranqını hesablamaq üçün iki üsuldan istifadə edirlər. Birinci üsul seçmə ilə matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək tərtibli minorunu tapmağa əsaslanır.

Bu zaman nəzərə almaq lazımdır ki,matrisin ranqı r-ə bərabərdirsə,onda tərtibi r-dən böyük olan bütün minorları sıfra bərabərdir.

Tərif. Matrisin xətti asılı olmayan sətirlərinin maksimal sayına matrisin ranqı deyilir. Matrisin ranqını hesablamağın ikinci üsulu onun üzərində aparılan elementar çevirmələrə əsaslanır. Elementar çevirmələr nəticəsində matrisin ranqı dəyişmir.Elementar çevirmələr vasitəsilə hər bir matrisi diaqanal şəklə gətirmək olar. Aydındır ki, diaqonal şəklində olan hər bir matrisin ranqı baş diaqonalda olan sıfırdan fərqli elementlərin sayına bərabərdir.

Xətti tənliklər sistemi və onların həlli.

Aşağıdakı xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Burada a_{ij} həqiqi əmsallar,b_i sərbəst hədlər,x_j , $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ axtarılan məchullardır. (1) xətti tənliklər sistemində $b_1=b_2=...=b_m=0$ olduqda ona xətti bircins tənliklər sistemi,sərbəst hədlərdən heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda isə ona xətti bircinsli olmayan tənliklər sistemi deyilir.

Həlli olan sistemə uyuşan (birgə),həlli olmayan sistemə isə uyuşmayan (birgə olmayan) sistem deyilir.Uyuşan sistemin bir və ya bir neçə həlli ola bilər. Əgər uyaşan sistemin bir həlli varsa ona müəyyən,birdən çox həlli varsa ona qeyri müəyyən sistem deyilir.

(1) sisteminin məchullarının əmsallarından düzəlmiş əsas matris:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matrisinə tənliklərin sağ tərəfindəki sərbəst hədlərdən ibarət olan sütunu əlavə edib yeni genişlənmiş matrisi $\bar{A}$ ilə işarə edək.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Xətti tənliklər sisteminin Kramer qaydası ilə həlli.

(1) sistemində məchulların sayı tənliklərin sayına bərabər olduqda (m=n) həmin sistemin həlli Kramer qaydası ilə tapılır.Tənliklərin sayı məchulların sayına bərabər olan aşağıdakı sistemə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

Bu sistemin əmsallarından və sərbəst hədlərindən aşağıdakı determinantları düzəldək:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu determinanta verilmiş sistemin əsas determinantı deyilir.Sistemin əsas determinantında ardıcıl olaraq i-ci sütunu sərbəst hədlərdən ibarət olan sütunla əvəz etdikdə alınan determinantları $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ $(i = 1,2, \dots, n)$ ilə işarə etsək alınar.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ b_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \cdots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & b_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots b_2 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots b_n \end{vmatrix}$$

Kramer teoremi.(4) xətti tənliklər sisteminin əsas determinantı $\Delta \neq 0$ olduqda,onun yeganə həlli var və bu həll aşağıdakı düsturlarla tapılır:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Bu düsturlara Kramer düsturları,həllin bu qayda ilə tapılmasına isə Kramer qaydası deyilir.

Misal : Xətti tənliklər sistemini Kramer qaydası ilə həll et.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Həlli:Sistemin əsas determinantını hesablayaq.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 4 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, x_3 = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Xətti tənliklər sisteminin matris üsulu ilə həlli.

(4) sistemində məchulların əmsallarından düzəlmiş matrisi A, sərbəst hədlərdən düzəlmiş sütun matrisini B,məchullardan düzəlmiş sütun matrisini X ilə işarə edək.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(4) xətti tənliklər sistemini matris şəklində yazaq.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ və ya $A \cdot X = B$. Bu tənlik matris tənlik adlanır.

Onda (4) xətti tənliklər sisteminin matris həlli: $X = A^{-1} \cdot B$.

Misal.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Həlli.$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Matris tənliyin həlli $X = A^{-1} \cdot B$ olduğundan A^{-1} matrisini tapaq.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\-10 & -4 & 8\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\14\\16\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}126+70-208\\-90-56+128\\18+14+16\end{pmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-12\\-18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Deməli $X_1=2, x_2=3, x_3=-2$ alınır.

Xətti tənliklər sisteminin Qauss üsulu ilə həlli

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$ Bu sistemin determinantı sıfırdan fərqli olduqda onu Kramer qaydası ilə həll etmək olar.Verilmiş xətti tənliklər sistemində məchulların sayı tənliklərin sayına bərabər olmadıqda sistemi məchulların ardıcıl yox edilməsi üsulu və ya Qauss üsulu ilə həll edirlər.Qauss üsulunun məzmunu misal üzərində:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+2x_4=1\\2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2\\3x_1-2x_2-x_3+2x_4=-5\\2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11\end{cases}$$

Həlli: Sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini 2-yə vurub alınan bərabərliyi uyğun olaraq 2-ci və 4-cü tənlikdən tərəf-tərəfə çıxaq,sonra birinci tənliyin hər iki tərəfini 3-ə vurub alınan tənliyi 3-cü tənlikdən tərəf-tərəfə çıxsaq alınar:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+2x_4=1\\-5x_2+4x_3-7x_4=0\\-4x_2+8x_3-4x_4=-8\\-7x_2+8x_3-3x_4=9\end{cases}$$

Bu sistemin 2-ci tənliyindən 3-cü tənliyini tərəf-tərəfə çıxsaq və alınan bərabərliyin hər iki tərəfini (-1)-ə vursaq alınar:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -8 \\ -4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -8 \\ -7x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

2-ci tənliyin hər iki tərəfini əvvəlcə 4-ə ,sonra da 7-yə vurub alınan bərabərlikləri uyğun olaraq üçüncü və dördüncü tənliklərlə toplayaq:

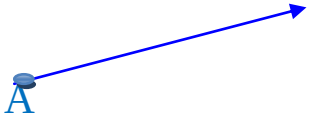
$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1} \\ \boldsymbol{x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -8} \\ \boldsymbol{24x_3 + 8x_4 = -40} \\ \boldsymbol{6x_4 = 13} \end{cases}$$

Vektorlar və onlar üzərində əməllər

Yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətlərə skalyar kəmiyyətlər deyilir.Məsələn:uzunluq,sahə,həcm,kütlə və s. Skalyar kəmiyyətlərdir.
Qiymət və istiqaməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətlərə vektorial kəmiyyətlər və ya vektorlar deyilir.Məsələn qüvvə,hərəkətin sürəti,təcili və s. Vektorial kəmiyyətlərdir.
Vektorial kəmiyyətləri həndəsi olaraq istiqamətlənmiş düz xətt parçası ilə göstərirlər.Vektorun istiqaməti ox işarəsi ilə göstərilir.

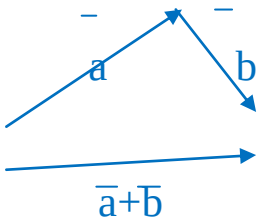
B

A nöqtəsi vektorun başlanğıcı,B nöqtəsi isə sonu adlanır.

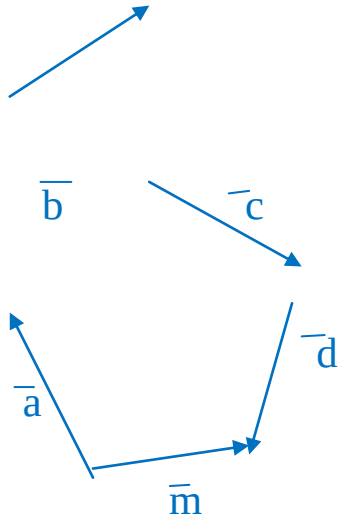


Bu vektor $\overline{AB}$ və ya $\bar{a}$ kimi işarə olunur.Vektorun uc nöqtələri arasındakı məsafəyə onun uzunluğu və ya modulu deyilir və uyğun olaraq AB ,yaxud a kimi işarə olunur.
Başlanğıc və son nöqtələri üst üstə düşən vektor sıfır vektor adlanır və $\bar{0}$ ilə işarə olunur.Sıfır vektorun uzunluğu sıfır,istiqaməti isə qeyri müəyyəndir.Uzunluqları və istiqamətləri eyni olan vektorlara bərabər vektorlar deyilir.
Vektorları toplamaq,bir vektordan digərini çıxmaq,vektoru istənilən ədədə vurmaq mümkündür.Bunlara vektorlar üzərində xətti əməllər deyilir.
$\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarını toplamaq üçün $\bar{b}$-nin başlanğıcını öz istiqaməti ilə $\bar{a}$-nın son nöqtəsinə gətirmək lazımdır.

Bu halda başlanğıcı $\bar{a}$-nın başlanğıcında,sonu isə $\bar{b}$-nin sonunda yerləşən vektor bu vektorların cəmi adlanır.



Üç və daha çox vektoru toplamaq üçün bu vektorlar paralel olaraq elə sürüşdürülür ki, ikinci vektorun başlanğıcı birincinin sonu ilə, üçüncü vektorun başlanğıcı ikinci vektorun sonu ilə və s. ,sonuncu vektorun başlanğıcı ondan əvvəlkinin sonu ilə üst üstə düşsün.

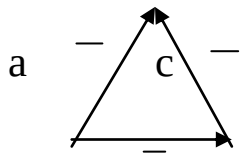


Nəticədə birinci vektorun başlanğıcını axırıncı vektorun sonu ilə birləşdirən vektor bu vektorların cəmi hesab olunur.

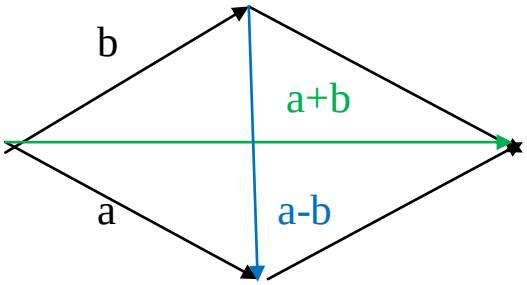
$$\bar{m}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$$

Bəzən m vektoruna verilən vektorların qapayıcı vektoru da deyilir.

a və b vektorlarının fərqi elə c vektoruna deyilir ki,onu b ilə topladıqda a vektoruna bərabər olsun.c=a-b



İki vektorun cəmini və fərqini onlar üzərində paraleloqram qurmaqlada tapmaq olar.Buna paraleloqram qaydası deyilir.



Veektorların vektorial hasili və xassələri

Tərif: a vektorunun b vektoruna vektorial hasili aşağıdakı üç şərti ödəyən c vektoruna deyilir.

1. C vektorunun uzunluğu a və b vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabər olsun,

$$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|sin\varphi$$

2. c vektoru a və b vektorlarının müstəvisinə perpendikulyar olsun.
3. a,b,c vektorları sağ oriyentasiyalı olsun(hərəkət saat eqrebi istiqamətində olduqda)

Vektorial hasilin xassələri

1. vektorial hasil yerdəyişmə xassəsinə tabe deyildir.

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$$

2. Skalyar vuruğu vektorial hasil işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$[\gamma\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \gamma\bar{b}] = \gamma[\bar{a}, \bar{b}]$$

3. Vektorial hasildə paylanma qanunu doğrudur.

$$[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}].$$

Vektorial hasil aşağıdakı düstur ilə tapılır.

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}$$

Misal:$\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ v $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ vektorlarının vektorial hasilini tapaq:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{k}$$
$$= \bar{i} - 10\bar{j} - 7\bar{k}$$

Vektorların qarışıq hasili və xassələri

Tərif: $\bar{a}v$ $\bar{b}$ vektorlarının vektorial hasilinin c vektoruna skalyar hasilinə $\bar{a}, \bar{b}$,$\bar{c}$ vektorlarının qarışıq hasili deyilir və $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$ kimi işarə olunur.

Qarışıq hasilin xassələri:

1. $\bar{a}, \bar{b}$,$\bar{c}$ vektorlarının dairəvi yerdəyişməsi nəticəsində onların qarışıq hasili dəyişmir.

2. Qarışıq hasildə ixtiyari iki vektorun yerini dəyişdikdə qarışıq hasilin yalnız işarəsi dəyişir.
3. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlarının qarışıq hasili sıfra bərabərdirsə onda bu vektorlar komplanar olar.

Misal: $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$ v $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}, \overline{c} = \overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$ vektorlarının qarışıq hasilini tap.

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 26 - 5 + 2 = 23$$

Funksiyanın törəməsi.

Tutaq ki,y=f(x) funksiyası (a;b) aralığında təyin olunmuş funksiyadır və xϵ(a;b). Arqumentin x nöqtəsində aldığı Δx artımına uyğun Δy=f(x+Δx)-f(x), x+Δx ϵ(a;b) olar.

Tərif: Arqumentin artımı istənilən qayda ilə sıfra yaxınlaşdıqda $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nisbətinin sonlu limiti varsa,onda həmin limitə verilmiş funksiyanın törəməsi deyilir və $y', \frac{dy}{dx}, f'(x)$ ilə işarə olunur.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \cdots$$

Verilmiş x nöqtəsində törəməsi olan funksiyaya həmin nöqtədə diferensiallanan funksiya deyilir.(a,b) intervalının hər bir nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin intervalda diferensiallanan funksiya adlanır.

Cəmin,hasilin və nisbətin törəməsi

Tutaq ki, f(x) funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuşdur və x isə bu parçanın daxili nöqtəsidir.

Teorem 1.x nöqtəsində diferensiallanan y=f(x) funksiyası həmin nöqtədə kəsilməyəndir. Bu teoremin tərsi doğru deyil,yəni verilmiş x nöqtəsində kəsilməyən funksiyanın həmin nöqtədə törəməsi olmayada bilər.

Teorem 2. Verilmiş x nöqtəsində diferensiallanan sonlu sayda $f_k(t)$ $(k = 1,2, \dots, n)$ funksiyalarının cəmi də həmin nöqtədə diferensiallanandır və cəmin törəməsi toplananların törəmələri cəminə bərabərdir:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{n} f_k{}'(x)$$

Teorem 3. Verilmiş x nöqtəsində diferensiallanan f(x) və g(x) funksiyalarının hasili də həmin nöqtədə diferensiallanandır və hasilin törəməsi aşağıdakı qayda ilə hesablanır:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr çıxır:

Nəticə1. Sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:$[cf(x)]' = cf'(x)$

Nəticə 2. x nöqtəsində diferensiallanan f(x) və g(x) funksiyalarının fərqidə həmin nöqtədə diferensiallanandır və funksiyaların fərqinin törəməsi onların törəmələri fərqinə bərabərdir:

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Teorem 4. x nöqtəsində diferensiallanan f(x) və g(x) funksiyalarının nisbəti həmin nöqtədə diferensiallanandır və nisbətin törəməsi aşağıdakı qayda ilə hesablanır:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

Mürəkkəb və tərs törəmələri

Əgər $x = \varphi(t)$ funksiyası t nöqtəsində,*y=f(x)* funksiyası uyğun x nöqtəsində diferensiallanandırsa,onda $y = f[\varphi(t)]$ mürəkkəb funksiyası da t nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi aşağıdakı düstur ilə tapılır:

$$(f[\varphi(t)])' = f'(x)\varphi'(t)$$

Tutaq ki, f(x) funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş,kəsilməyən, monoton funksiyadır və onun $[c, d]$ parçasında kəsilməyən $x = \varphi(y)$ tərs funksiyası var və onun törəməsi belədir:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Elementar funksiyaların törəmələri

1. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$

2. $(lnx)' = \frac{1}{x}$

3. $\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

6. $[sinf(x)]' = cosf(x) \cdot f'(x)$

7. $[cosf(x)]' = -sinf(x) \cdot f'(x)$

8. $[tgf(x)]' = \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$

9. $[ctgf(x)]' = -\frac{f'(x)}{sin^2 f(x)}$

Funksiyanın diferensialı

Tutaq ki, f(x) funksiyasının x nöqtəsində $f'(x)$ törəməsi var. Onda törəmənin tərifinə görə

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ v ya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),\ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

Buradan alarıq ki, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Buradan görünür ki, funksiya artımı iki hissədən ibarətdir. Birinci $f'(x) \cdot \Delta x$ hissəsinə funksiya artımının baş hissəsi deyilir.

Tərif: Diferensiallanan y=f(x) funksiyasının x nöqtəsində artımının baş hissəsinə onun x nöqtəsində diferensialı deyilir və dy və ya df(x) ilə işarə olunur:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \ \ v \ \ ya \ \ dy = f'(x)\Delta x$$

Funksiyanın diferensialı onun törəməsi ilə arqumentin diferensialı hasilinə bərabərdir:

$$dy = f'(x)dx.$$

Diferensialın təqribi hesablamaya tətbiqi.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

olduğundan funksiya artımının ikinci hissəsi Δx artımına nəzərən daha yüksək tərtibdən sonsuz kiçiləndir. Ona görə də $\Delta y = dy$ təqribi bərabərliyini yaza bilərik. Buradan

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x \quad v\square\, ya \quad f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$$

Bu bərabərlikdən istifadə edərək,bir çox funksiyaların təqribi qiymətlərini hesablamaq üçün sadə düsturlar almaq olar.

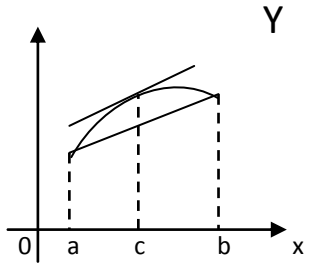
Laqranj teoremi

$[a, b]$ parçasında kəsilməyən və (a,b) intervalında diferensiallanan y=f(x) funksiyası üçün həmin intervalda yerləşən elə c nöqtəsi var ki, bu nöqtədə

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Bu düstur Laqranj düsturu və ya sonlu artımlar düsturu adlanır.

Laqranj teoreminin həndəsi mənası onu göstərir ki, teoremin şərtləri ödənildikə y=f(x) funksiyasının qrafiki olan əyri üzərində elə C nöqtəsi var ki, bu nöqtədə əyriyə çəkilən toxunan AB vətərinə paraleldir.



1. $d\left(u^{\alpha}\right) = \alpha u^{\alpha-1} du$

2. $d\left(a^{u}\right) = a^{u} \ln a \, du$ $\square$

$$d(e'') = e''du$$

3. $$d(loq_a u) = \frac{du}{u} \cdot loq_a e = \frac{du}{u \cdot \ln a}$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}$$

4. $$d(\sin u) = \cos u.du$$

$$d(\cos u) = -\sin u\ du$$

$$d(tgu) = \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$d(ctgu) = -\frac{du}{\sin^2 u}$$

5. $$d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(arc\,tg\ u) = \frac{du}{1+u^2}$$

$$d(arc\cos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(arc\,tg\ u) = -\frac{du}{1+u^2}$$

Qeyri müəyyən inteqral

Tərif . $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində

$$F'(x)=f(x) \qquad (1) \qquad \text{və ya} \qquad dF(x)=f(x)dx \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənilərsə , onda F(x) funksiyasına f(x) funksiyasının $[a,b]$ parçasında ibtidai funksiyası deyilir.

Onda F(x) funksiyası f(x) funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa , onda C $\forall$ sabit ədəd olduqda F(x)+c funksiyası da həmin f(x) funksiyasının ibtidai funksiyası olar.

(1) bərabərliyinə görə :

$$[F(x)+c]' = F'(x)=f(x) \quad .$$

Buradan alırıq ki, əgər f(x) funksiyasının bir F(x) ibtidai funksiyası vardırsa onda $F(x)+c$ şəklində olan sonsuz sayda bütün funksiyalar da həmin funksiyanın ibtidai funksiyasıdır.

Teorem. $f(x)$ funksiyasının $\forall$ iki F(x) və Φ(x) ibtidai funksiyası bir-birindən sabit ədədlə fərqlənir: Φ(x) =F(x)+c (3).

Tərif. $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna $f(x)$ funksiyasının həmin parçada qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və

$$\int f(x)dx \qquad (4)$$

kimi işarə olunur. Onda $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ (5) olar. Burada ∫- işarəsi , x- inteqrallama dəyişəni , f(x) inteqralaltı funksiya , $f(x)\,dx$ isə inteqralaltı ifadə adlanır.

Qeyri-müəyyən inteqralın sadə xassələri.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \qquad (1) \qquad\qquad F'(x)=f(x) \qquad (2)$$

Xassə 1. Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya bərabərdir;

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (3)$$

Xassə 2. Qeyri-müəyyən inteqralın diferensialı inteqralaltı ifadəyə bərabərdir.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Xassə 3. Hər hansı funksiya diferensialının qeyri-müəyyən inteqralı həmin funksiya ilə ∀ sabitin cəminə bərabərdir. $\int dF(x) = F(x) + c$

Xassə 4. Sonlu sayda funksiyalar cəminin qeyri-müəyyən inteqralı onların qeyri-müəyyən inteqralının cəminə bərabərdir ;

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx \qquad (4)$$

Xassə 5. Sabit vuruğu inteqral işarəsi xaricinə cıxarmaq olar.

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \qquad (5)$$

Nəticə: İki funksiya fərqinin qeyri-müəyyən inteqralı onların qeyri-müəyyən inteqrallarının fərqinə bərabərdir.

$$\int [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int f(x)dx - \int \varphi(x)dx \qquad (6)$$

Xassə 6. İnteqralın inteqrallama dəyişəninə nəzərən invariantlıq xassəsi vardır, yəni

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

olarsa ,onda istənilən diferensiallanan u=u(x) funksiyası üçün

$$\int f(u)du = F(u) + c \qquad (7)$$ olar.

Əsas inteqrallar cədvəli.

1. $\int x^2 dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

7. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

17. $\int chxdx = shx + C$

18. $\int shxdx = chx + C$

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Inteqrallama üsulları .

1.Dəyişəni əvəzetmə üsulu.

Bu üsulda dəyişən yeni bir dəyişənlə əvəz olunur. Bu yeni dəyişənə görə alınan inteqralaltı funksiyası asan hesablanır.

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad \textbf{(1)}$$

$x = \varphi(t)$ diferensiallanan funksiya olarsa , onda

$$dx = \varphi'(t)dt \qquad \textbf{(2)}$$

olar. Buna görədə (2)- ni və (1)-də nəzərə alsaq onda

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \quad \varphi'(t)dt \qquad \textbf{(3)}$$

bərabərliyi alınır. Buna **dəyişənin əvəzetmə düsturu** deyilir.

2. Hissə- hissə inteqrallama düsturu.

Tutaq ki, u və v kəmiyyətləri x-in diferensiallana bilən funksiyalarıdır. Onda ,uv hasilinin diferensialı

$$d(uv) = udv + vdu$$

düsturu ilə hesablanır. Buradan inteqrallamaqla

$$uv = \int udv + \int vdu$$

yaxud

$$\int udv = uv - \int vdu$$

alırıq. Axırıncı düstura **hissə-hissə inteqrallama düsturu** deyilir.

Müəyyən inteqral.

Tərif. $f(x)$ funksiyası ücün [a,b] parçasında düzəldilmiş $f(\xi_k)\Delta x_k$ inteqral cəminin $\lambda(T)\to 0$ şərtində sonlu J limiti varsa , onda f(x) funksiyasına [a,b] parçasında inteqrallanan funksiya, J ədədinə isə onun [a,b] parçasında müəyyən inteqralı deyilir və

$$\int_a^b f(x)dx$$

ilə işarə edilir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

Burada f(x) funksiyası inteqralaltı funksiya , a və b ədədləri müəyyən inteqralın aşağı və yuxarı sərhədləri, x dəyişəni isə inteqrallama dəyişəni adlanır.

Müəyyən inteqralın əsas xassələri.

Xassə 1. Sabit vuruğu müəyyən inteqralın işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\int_a^b A\,f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

Xassə 2. Sonlu sayda $f_1(x)\ldots, f_m(x)$ funksiyalarının cəminin müəyyən inteqralı
toplananların müəyyən inteqrallarının cəminə bərabərdir.

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\,dx$$

Xassə 3. İstənilən c nöqtəsi üçün

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

bərabərliyi doğrudur.

Xassə 4. $a \le x \le b$ parçasında $f(x) \ge 0$ olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Xassə 5. $a \le x \le b$ parçasında kəsilməyən istənilən $f(x)$ funksiyası üçün

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Xassə 6. [a,b] parçasında inteqrallanan $f(x)$ və φ(x) funksiyalarının hasili də

həmin parçada inteqrallanandır.

Nyuton-Leybnis düsturu.

Müəyyən inteqral bəhsində qeyd etdik ki, verilmiş funksiyanın müəyyən inteqralı həmin funksiya üçün düzəldilmlş ∫ cəminin limitidir. Lakin qeyd etmək lazımdır ki, bu üsulla müəyyən inteqralı hesablamaq əlverişli üsul deyildir. Çünki bu üsuldan istifadə etdikdə mürəkkəb cəminin limitini tapmaq lazım gəlir. Bu da cox vaxt mümkün olmur və ya müəyyən texnikİ cətinliklərlə bağlı olur. Bu səbəbdən də müəyyən inteqralın hesablanması üçün əlverişli olan Nyuton – Leybnis düsturunu öyrənmək lazım gəlir.

Teorem. $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri Φ (x) funksiyasıdırsa , onda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (1)$$

düsturu doğrudur. (1) Düsturuna Nyuton – Leybnis düsturu deyilir.

Hissə - hissə inteqrallama.

Tutaq ki, u və v kəmiyyətləri x-in diferensiallana bilən funksiyalarıdır. Onda

$$(uv)' = u'v + uv'$$

eyniliyin hər iki tərəfini $[a,b]$ parçasında inteqrallayaq ;

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv'\,dx \qquad (1)$$

Burada $\int (uv)'\,dx = uv + c$ olduğundan

$$\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b$$

ona görə (1) bərabərliyini

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Kimi yazmaq olar.

Dəyişəni əvəzetmə üsulu.

Teorem . Tutaq ki, 1) $f(x)$ funksiyası [a,] parçasında kəsilməyəndir ;
2) x=φ(t) funksiyası və onun φ′(t) törəməsi $[\alpha,\beta]$ parcasında kəsilməyəndir ;
3) $[\alpha,\beta]$ parcasında a=φ(α)≤φ(t)≤φ(β)=b (1) münasibəti ödənilir.
Onda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

bərabərliyi doğrudur.Bu düstura müəyyən inteqralda dəyişəni əvəzetmə düsturu deyilir.

Müəyyən inteqralın tətbiqi ilə müstəvi fiqurlarının sahələrinin, fırlanma cisimlərinin həcminin və cismin getdiyi yolun tapılması.

1. Paralel kəsiyin məlum sahəsinə görə cismin həcminin hesablanması. Əgər müstəvi *OX* oxuna perpendikulyar olarsa, onda cismin müstəvi ilə kəsiyinin sahəsi x dəyişəninin funksiyası olar, yəni $s = s(x)$, $a \le x \le b$. Onda cismin *OX* oxuna perpendikulyar olan $x = a$ və $x = b$ müstəviləri aralarında qalan hissəsinin həcmi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2. Fırlanmadan alınan cismin həcminin hesablanması. $y = f(x)$ əyrisi, *OX* oxu və $x = a$, $x = b$ düz xətləri ilə məhdud olan əyrixətli trapesiya *OX* oxu ətrafında fırlanırsa, fırlanmadan alınan cismin həcmi

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$$

düsturu ilə hesablanır.

V. Fırlanmadan alınan səthin sahəsi. Tutaq ki, $y = f(x)$ müstəvi əyrisinin *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan səth verilmişdir. Bu səthin $a \le x \le b$ parçasında uyğun hissəsinin sahəsi

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

düsturu ilə hesablanır.

Müəyyən inteqralın tətbiqləri

1. Müstəvi fiqurunun sahəsinin hesablanması

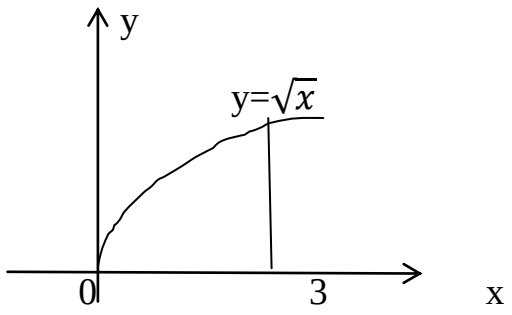
Tutaq ki, f(x)[a, b] parçasında kəsilməyən və mənfi olmayan (f(x)≥0) funksiyadır. Onda müəyyən inteqralın həndəsi mənasına görə əyrixətli trapesin sahəsi üçün

$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

bərabərliyini yazmaq olar.

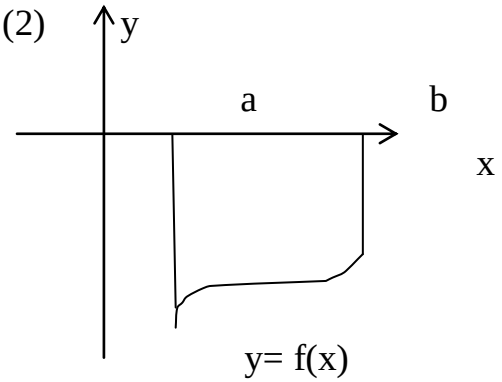
Əgər [a, b] parçasında kəsilməyən f(x) funksiyası müsbət deyilsə, onda

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

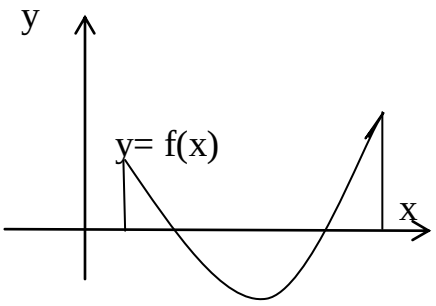


Olar. Bu inteqralın mütləq qiyməti yuxarıdan [a, b] parçası, aşağıdan y=f(x) əyrisi, yanlardan isə x=a və x=b düz xətləri ilə əhatə olunmuş trapesin sahəsinə bərabər olar:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|. \qquad (2)$$



Əgər [a, b] parçasında kəsilməyən f(x) funksiyası işarəsini sabit saxlamırsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqralı ox oxunda yerləşən əyrixətli trapesiyaların sahələrinin cəbri cəminə bərabər olar. Ox oxundan yuxarıda yerləşən trapesiyaların sahələri cəmə müsbət işarə ilə, aşağıda yerləşənlərinki isə mənfi işarə ilə daxil olar.

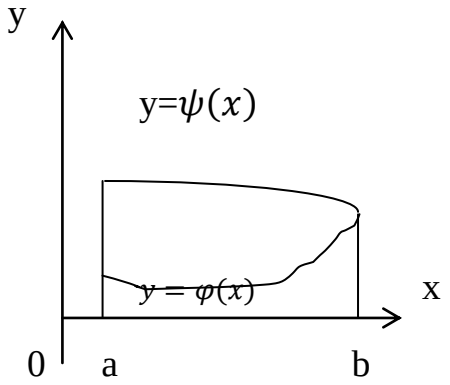


0 a b

Əgər [a, b] parçasında kəsilməyən y=$\psi(x)$, $y=\varphi(x)$ funksiyaları $\psi(x)\le\varphi(x)$ münasibətini ödəyərsə, onda aşkardır ki, onların əmələ gətirdiyi fiqurun sahəsi

$$S=\left|\int_a^b \psi(x)-\varphi(x)\right|dx$$

düsturu ilə hesablanar.



Verilmiş əyrixətli trapesiyanı əhatə edən y= f(x) (x≥0) əyrisi parametrik şəkildə verildikdə də onun sahəsini hesablamaq olar. Tutaq ki, y= f(x) (a≤x≤b) funksiyası

$$\begin{cases} y=\psi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases},\ (\alpha\le t\le\beta)$$

parametrik şəkildə verilmişdir. Burada $x=\varphi(t)$ funksiyası monotondur, $[\alpha,\beta]$parçasında kəsilməyən törəməsi vardır və $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ bərabərliklərini ödəyir. Onda (3) inteqralında $x=\varphi(t), dx=\varphi'$(t)dt əvəzləməsini aparsaq və y=f(x)=f($[\varphi(t)]=\psi(t)$ olduğunu nəzərə alsaq,

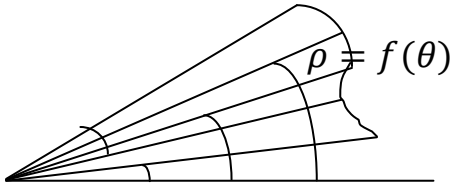
$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

olar.

2. Əyrixətli sektorun sahəsi

Müstəvi üzərində OA və OB radius – vektorları və AB əyrisi ilə hüdudlanmış fiqura baxaq. Belə fiqura mərkəzi koordinat başlanğıcında olan əyrixətli sektor deyilir.

Polyar koordinat sistemində AB əyrisinin $\rho=f(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$ tənliyi verildikdə OAB əyrixətli sektorunun sahəsini hesablayaq.$B\theta$



$\theta_1\theta_0$

O $\alpha\theta_k\ \theta_{k+1}\rho$

Bu məqsədlə $[\alpha, \beta\ ]$ parçasını $\theta_0 = \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$ bölgüsünü götürək və $\theta = \theta_0 = \alpha,\ \theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2, \ldots \theta = \theta_n = \beta$ şüaları verilmiş sektoru n hissəyə bölək. Çəkilmiş radius-vektorlar arasındakı bucaqları uyğun olaraq $\Delta\theta_1 \Delta\theta_2, \ldots \Delta\theta_n$ ilə işarə edək.

θ_k v θ_{k+1} arasında yerləşən $\overline{\theta_k}$ bucağına uyğun radius-vektroun uzunluğunu $\overline{\rho_k}$ ilə işarə edək.

Radiusu $\overline{\rho_k}$ və mərkəzi bucağı$\Delta\theta_k$ olan dairə vektorunun sahəsi

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\overline{\rho_k}^2 \Delta\theta_k$$

olduğundan

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \overline{\rho_k}^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |f(\theta_k)^2| \Delta\theta_k$$

cəmi pilləvari sektorun sahəsini verər.

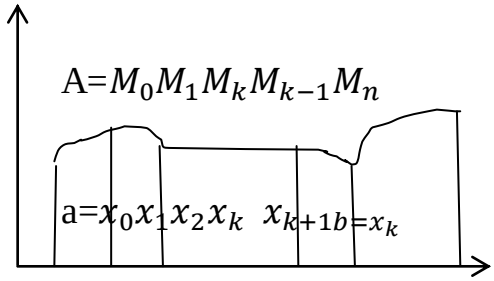
Bu cəm $\rho = f(\theta)$ funksiyasının $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ parçasında inteqral cəmidir və ona görə $\lambda \to 0$ şərtində onun limiti

$$S = \frac{1}{2} p^2 d\theta \quad v \quad ya\ S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2\,(\theta) d\theta \qquad (5)$$

əyrixətli sektorun sahəsini verər.

3. Əyri qövsünün uzunluğu

Tutaq ki, Γ=(AB) müstəvi əyrisi düzbucaqlı koordinat sistemində y=f(x) (a≤x≤b) tənliyi ilə verilmişdir. [a, b] parçasının ixtiyari a=$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ bölgüsünə, əyri üzərində, koordinatları uyğun olaraq x_k v $y_k = f(x_k)(k = 0, 1, \dots n)$ $olan\, A = M_0, M_1, \dots M_{n-1}, M_n = B$ nöqtələri uyğun olar. Bu nöqtələri ardıcıl olaraqdüz xətt parçaları ilə birləşdirdikdə Γ əyrisi daxilinə çəkilmiş $M_0, M_1, \dots M_{n-1}, M_n$ sınıq xətti adlanır. Onda Γ əyrisi daxilinə çəkilmiş sınıq xəttin uzunluğu



$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta l_k$$

olar. Sınıq xəttin ən böyük tərəfinin uzunluğu λ olsun:

$$\lambda = \max(\Delta l_0, \Delta l_1, \dots \Delta l_{n-1}).$$

Tərif. Γ əyrisi daxilinə çəkilmiş sınıq xəttin uzunluğunun $\lambda \to 0$ şərtində sonlu limiti varsa həmin əyriyə sonlu uzunluqlu əyri və

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta l_k \qquad (6)$$

limitinə onun uzunluğu deyilir.

Hamar Γ əyrisi üçün (yəni f(x) funksiyası və onun f′(x) törəməsi [a, b] parçasında kəsilməyən olduqda (6) limiti var. Doğrudan da, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ və $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$olduğunu nəzərə alsaq

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [\mathrm{f}'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$$

olar.

Bu ifadə [a, b] parçasında kəsilməyən $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ funksiyasının inteqral cəmidir. Buna görə də müəyyən inteqralın tərifinə əsasən

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \qquad (7)$$

olar.

İndi fərz edək ki, hamar Γ əyrisinin tənliyi

$$\begin{cases} y=\psi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases},\ (\alpha\le t\le\beta)$$

parametrik şəkildə verilmişdir və $\varphi'(x)$ törəməsi $[\alpha,\beta]$ parçasında heç yerdə sıfra çevrilmir. Onda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

olduğunu nəzərə alaraq, (7) inteqralında x= $\varphi(t)$ əvəzləməsini (a= $\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$) aparmaq olar:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]^2}\,\varphi'(t)=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2dt.}$$

Buradan parametrik şəkildə verilmiş hamar Γ əyrisinin uzunluğunu hesablamaq üçün

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x_1'^2+y_1'^2}\,dt \qquad (8)$$

düsturu alınır.

Əgər hamar Γ əyrisinin parametrik tənliyi

$$\begin{cases} y=\psi(t) \\ y=\varphi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases},\ (\alpha\le t\le\beta)$$

Şəklində verilərsə, eyni mühakimə ilə onun uzunluğunu

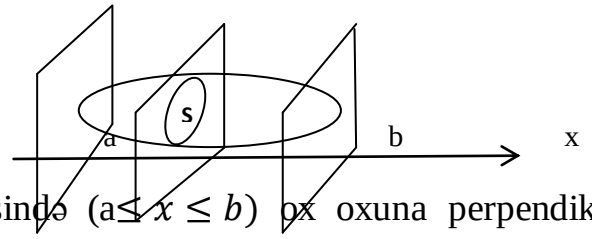
$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + \chi'(t)]^2} \qquad (9)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

4. Cisimlərin həcminin hesablanması

1) **Paralel kəsiklərinin sahəsinə görə həcmin hesablanması.**

Tutaq ki, fəzada v cismi verilmişdir. Bu cismin, ox oxuna perpendikulyar müstəvilərlə kəsiyinin sahəsi məlum olduqda, onun həcmini hesablamaq olar. v cisminin nöqtələri absislərinin ən kiçik a, ən böyüyü isə b olsun.



V cisminin [a, b] parçasının x nöqtəsində ($a \leq x \leq b$) ox oxuna perpendikulyar keçirilmiş müstəvi ilə kəsiyinin sahəsini s(x) ilə işarə edək. S(x) funksiyasının [a, b] parçasında kəsilməz olmasını fərz edək.

[a, b] parçasının istənilən

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

bölgüsünü götürək və $x=x_k$ (k=0, 1, 2,...n) bölgü nöqtələrindən ox oxuna perpendikulyar müstəvilər keçirək. Bu müstəvilər v sistemini laylara bölür. Hər bir laya kiçik bir silindr kimi baxsaq, onda $[x_k, x_{k+1}]$ parçasına uyğun layın oturacağının $S(\xi_k)$ ($x_k \leq \xi_k < x_{k+1}$), hündürlüyü $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ və həcmi təqribən $S(\xi_k)\ \Delta x_k$ ədədinə bərabər olar.

Onda bütün silindrlərin həcmi üçün

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta x_k \qquad (11)$$

bərabərliyini yazmaq olar.

Tərif. (11) cəminin $\lambda \to 0$ şərtində limiti varsa həmin limitə v cisminin həcmi deyilir və v ilə işarə olunur:

$$v = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta x_k \qquad (12)$$

Sonlu həcmi olan cismə kublanan cism deyilir.

(11) cəmi s(x) funksiyasının [a, b] parçasının istənilən bölgüsünə uyğun inteqral cəmidir. Ona görə də (12) bərabərliyindən

$$v = \int_a^b S(x)dx \qquad (13)$$

münasibəti alınar.

2) **Fırlanmadan alınan cismin həcmi.**

Əgər v cismi y=f(x)≥ 0 (a≤ $x \le b$) əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınmışsa, onda onun ox oxuna perpendikulyar müstəvilərlə kəsikləri dairələr olar. Bu halda

$$S(x)=\pi y^2 = \pi[f(x]^2$$

olar və buna görə də (13) düsturundan

$$v = \pi \int_a^b [f(x]^2 dx \qquad (14)$$

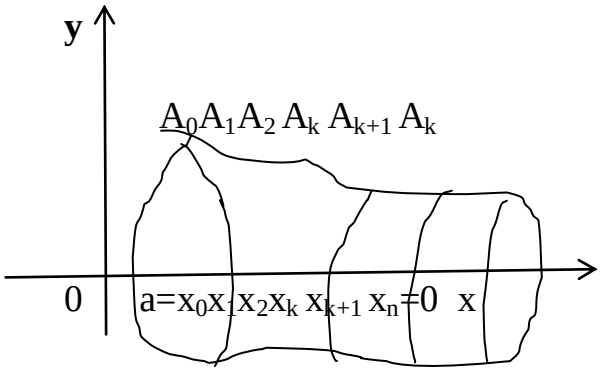
alınar.

5. Fırlanmadan alınan səthin sahəsi

Fərz edək ki, [a, b] parçasında təyin olunmuş f(x) funksiyası həmin parçada kəsilməyəndir və kəsilməyən törəməsi vardır. y=f(x) (a≤ $x \le b$) əyrisinin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayaq.

Bu məqsədlə [a, b] parçasının ixtiyarı $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

bölgüsünü götürək. $x=x_k$ (k=0, 1, 2,...n) bölgü nöqtələrinə əyri üzərində uyğun olan nöqtələr $A_k[x_k, f(x_k)]$ (k=0, 1, 2,...n) olsun. Bu nöqtələri düz xətt parçaları ilə birləşdirdikdə A_0, A_1, ... A_n sınıq xətti alınır.



Həmin sınıq xəttin ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi (kəsik konusların yan səthlərinin sahələri cəmi)

$$P_n = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} l_k = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1})\, l_k \qquad (15)$$

olar. Burada y=f(x) (k=0, 1, 2,...n) və

$$l_k = |\overline{A_k A_{k+1}}| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k - x_k)^2 + (\Delta y_k - y_k)^2} \quad (k = 0, 1, \dots n-1$$

Tərif. (15) cəminin $\lambda \to 0$ şərtində limiti varsa həmin limitə σ səthinin sahəsi deyilirvə p ilə işarə edilir:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1})\, l_k \qquad (16)$$

L_k-nın ifadəsində $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ fərqinə Lağraujın sonlu artım düsturunu tətbiq etməklə, (16) bərabərliyində yazıb müəyyən çevirmə apardıqdan sonra limitə keçərəkfırlanmadan alınan səthin sahəsi düsturunu

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad (17)$$

şəklində alarıq.

Əyri

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ (\alpha \leq t \leq \beta)$$

parametrik tənlikləri ilə verildikdə (17) düsturundan istifadə etməklə onun fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablamaq olar. Bunun üçün həmin düsturda $x = \varphi(t), x = \psi(t), y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ yazmaq lazımdır. Onda

$$P(\sigma) = 2\pi \int_a^b \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \qquad (18)$$

olar.

6. İşin müəyyən inteqral vasitəsilə hesablanması

Tutaq ki, M maddi nöqtəsi bir F qüvvəsinin təsiri ilə os düz xətti istiqamətində hərəkət edir və qüvvənin istiqaməti hərəkət istiqamətinin eynidir. M nöqtəsini s=a vəziyyətindən s=b vəziyyətinə köçürmək üçün F qüvvəsinin gördüyü işi tapmaq tələb olunur.

1) F sabit olarsa, onun gördüyü A işi, gedilən yol ilə F qüvvəsi hasilinə bərabərdir, yəni

$$A=F\ (b-a)$$

2) Tutaq ki, F qüvvəsi maddi nöqtənin vəziyyətindən asılı olaraq, kəsilmədən dəyişir, yəni qüvvə, $a \leq s \leq b$ parçasında kəsilməyən F(s) funksiyasından ibarətdir.

[a, b] parçasını uzunluqları $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$ olan n ixtiyari hissəyə bölək; sonra $[S_{k-1}, S_k]$ kiçik parçasında ixtiyari bir ξ_k nöqtəsi götürüb, F(s) qüvvəsinin ΔS_k (k=1, 2,...n) yolunda gördüyü işi təqribi olaraq

$$F\ (\xi_k)\Delta S_k$$

hasili ilə əvəz edək. Bu o deməkdir ki, hər kiçik parçada biz qüvvəni sabit hesab edirik, yəni $F=F\ (\xi_k)$ qəbul edirik. Bu halda $\Delta\xi_k$ kafi qədər kiçik götürülürsə, onda $F\ (\xi_k)\Delta S_k$ hasili qüvvənin ΔS_k yolunda gördüyü işin təqribi qiyməti,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} F\ (\xi_k\ )\Delta S_k$$

cəmi isə F qüvvəsinin bütün [a, b] parçasında gördüyü işin təqribi qiyməti olar.

Aşkardır ki, A_n cəmi F=F(s) funksiyası üçün [a, b] parçasında düzədilmiş inteqral cəmidir. Bu cəmin $\max\Delta S_k \to 0$ şərtində limitinə F(s) qüvvəsinin s=a ilə s=b nöqtələri arasındakı yolda gördüyü iş deyilir. Deməli,

$$A = \int_a^b F(s)dx \qquad (19)$$

Diferensial tənliklər haqqında ümumi anlayışlar.

Sərbəst dəyişən x, asılı dəyişən y və onun $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ törəmələri daxil olan tənliyə diferensial tənlik deyilir. *y*- dəyişəninin tənliyə daxil olan ən yüksək törəməsinin tərtibinə diferensial tənliyin tərtibi deyilir. n tərtibli diferensial tənliyi aşağıdakı kimi göstərmək olar;

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Birinci tərtib diferensial tənliyin həlli bir ∀ sabitdən , *n* tərtibli diferensial tənliyin həlli isə *n* ∀ sabitdən asılı funksiyalardır.

Diferensial tənliyin həllinin tapılması prosesinə diferensial tənliyin inteqrallanması deyilir. Diferensial tənliyinin ∀ sabitlərdən asılı həllinə onun ümumi həlli deyilir. Diferensial tənliyin ümumi həllinə daxil olan sabitlərin qeyd olunmuş qiymətlərində alınan həllərə xüsusi həllər deyilir.

Diferensial tənliyin həllinin qrafikinə bu tənliyin inteqral əyrisi deyilir. Birtərtibli diferensial tənliyin inteqral əyriləri müstəvi üzərində bir parametrdən asılı əyrilər ailəsi təşkil edir.

Diferensial tənliyi həll etmək , onun inteqral əyriləri ailəsini təyin etmək deməkdir. Əgər diferensial tənliyinin həllinin tapılması

müəyyən funksiyaların , qeyri-müəyyən inteqrallarının tapılmasına gətirilirsə , bu halda tənliyə kvadratura ilə həll edilən tənliklər deyilir.

Birtərtibli diferensial tənliklər.

Birinci tərtib diferensial tənliyinin ümumi şəkli aşağıdakı kimidir.

$$F(x, y, y') = 0$$

(1)

Bəzi hallarda bu tənliyi y^1 dəyişəninə nəzərən həll edərək

$$y' = f(x, y)$$

(2)

şəklində yazmaq olar. Bu törəməyə nəzərən həll edilmiş birinci tərtib diferensial tənlikdir. Bu tənliyi bəzi hallarda ona ekvivalent olan

$$dy - f(x, y)\,dx = 0 \qquad (3)$$

şəklində yazırlar. Ümumi halda bəzən birinci tərtib diferensial tənlik

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (4)$$

şəklində tənliklərə deyilir.

Koşi məsələsi.

$y' = f(x, y)$ diferensial tənliyinin $y(x_o) = y_o$ şərtini ödəyən , yəni $x=x_o$ olduqda $y=y_o$

olan həllinin tapılması məsələsinə birinci tərtib diferensial tənlik ücün Koşi məsələsi deyilir. Həndəsi olaraq Koşi məsələsi tənliyin bütün inteqral əyriləri içərisindən $M_o(x_o,y_o)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisinin tapılmasından ibarətdir.

Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər.

Fərz edək ki, M(x,y) və N(x,y) funksiyaları müstəvi üzərində hər hansı D oblastdında təyin edilmiş , kəsilməz funksiyalardır. Yuxarıda qeyd etdik ki, birinci tərtib diferensial tənliyi

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

(1)

şəklində yazmaq olar.

Tərif . Əgər diferensial tənliyi

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0$$

(2)

şəklində göstərmək olarsa , onda həmin tənliyə dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik deyilir. Burada $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları təyin oblastlarında kəsilməz funksiyalardır.

(1) Tənliyinin hər iki tərəfini inteqrallasaq

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = C \qquad (3)$$

alınır.

Bircins diferensial tənliklər.

Fərz edək ki, $f(x,y)$ funksiyası hər hansı D oblastında təyin edilmiş funksiyalardır.

Tərif 1. Əgər istənilən t üçün $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ şərti ödənilərsə, onda $f(x,y)$funksiyasına n tərtibli bircins funksiya deyilir.

Xüsusi halda n=0 olarsa, $f(x,y)$ sıfır tərtibli bircins funksiya alınır. Bu halda $f(tx,ty) = f(x,y)$ alarıq. Əgər sonuncu bərabərlikdə $t = \frac{1}{x}$

qəbul etsək, $f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ alınar. Yəni, sıfır ölcülü bircinsli funksiya $\frac{y}{x}$ nisbətindən asılı funksiyadır.

Indi $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (1) diferensial tənliyinə baxaq.

Tərif 2. Əgər (1) diferensial tənlikdə P(x,y) və Q(x,y) funksiyaları eyni tərtibli bircins funksiyalar isə , onda bu tənliyə bircins diferensial tənliklər deyilir. Əgər diferensial tənlik $y'=f(x,y)$ şəklində verilmişsə və f(x,y) sıfır tərtibli bircins funksiya isə , onda həmin tənliyi $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ şəklində yazmaq olar. Ona görədə bəzən bircins diferensial tənlik dedikdə elə $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ şəklində başa düşülür.

Əgər verilmiş tənlik bircinsli isə, onda $u=\frac{y}{x}$ əvəzləməsinin köməyi ilə həmin tənliyi dəyişənlərinə ayrılan tənliyə gətirmək mümkündür. Doğrudanda

$$\frac{y}{x}=u,\quad y=ux,\quad y'=u'x+u\quad u+u'x=\varphi(u)\Rightarrow u'x=\varphi(u)-u\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$$

buradan $$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

bu dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Əgər $\varphi(u)-u\neq 0$ isə, onda hər tərəfi inteqrallasaq , $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$ olar. Əgər F(u) ilə sol tərəfdəki inteqralın nəticəsi işarə etsək, $F(u)=\ln x-\ln c$ və ya $x=ce^{F(u)}$ alarıq. Bu verilmiş tənliyin ümumi həllidir. Burada $u=\frac{y}{x}$ əvəzləməsini yerinə yazmaq lazımdır.

Birtərtibli xətti diferensial tənliklər.

$$y'+P(x)y=q(x) \qquad (1)$$

şəklində tənliklərə xətti diferensial tənliklər deyilir. Burada *p(x)* və *q(x)* funksiyaları müəyyən *(a, b)* intervalında kəsilməz funksiyalardır. Əgər (1) tənliyində *q(x)=0* olarsa ,

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

tənliyinə bircins xətti tənlik deyilir.

(2) Tənliyi dəyişənlərinə ayrılan tənlikdir.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Burada hər tərəfi inteqrallayaq $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

Bu (2) xətti bircins tənliyinin ümumi həllidir.

Misal . 1. $y' + xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -xy; \quad \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int xdx \Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C$$

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bu tənliyin ümumi həllidir.

Misal .2. $y' + y\sin x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y\sin x; \qquad \frac{dy}{y} = -\sin xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin xdx; \qquad \ln|y| = \cos x + \ln C$$

$$y = Ce^{\cos x}$$

İkitərtibli xətti diferensial tənliklər.

Sərbəst dəyişəninə, axtarılan funksiyaya onun birinci və ikinci tərtib törəməsinə nəzərən tənliyə ikitərtibli diferensial tənlik deyilir. Bu tənliyi ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (1)$$

İkitərtibli diferensial tənliyi eyniliyə çevirən x məchulundan və iki

sərbəst ixtiyari C_1 ve C_2 sabitlərindən asılı olan $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ funksiyasına bu tənliyin ümumi həlli deyilir.

(1) tənliyinin ümumi həllindən C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərinin verilmiş $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$ qiymətlərində alınan $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ həllinə (1) tənliyinin xüsusi həlli deyilir.

Əgər $F(x,y,y',y'')=0$ tənliyi yüksək törəməyə nəzərən həll ediləndirsə, onda bu tənliyi

$$y''=f(x,y,y') \qquad (2)$$

şəklində göstərmək olar.

Sadə inteqrallanan ikitərtibli diferensial tənliklərə elə tənliklər aiddir ki, (2) bərabərliyinin sağ tərəfində duran funksiya yalnız üç arqumentin birindən asılı olsun.

İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins tənliklər

Tutaq ki, ikitərtibli xətti bircins

$$y''+py'+qy=0 \qquad (1)$$

tənliyi verilmişdir, burada p, q əmsalları sabit ədədlərdir. Bu tənliyin həlli $y=e^{kx}$ şəklində axtarılır, burada k axtarılan sabit ədəddir. Onda

$$y'=ke^{kx},\ \ y''=k^2e^{kx}.$$

Törəmələrin bu qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazaq

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0,$$

burada $e^{kx} \neq 0$ olduğundan alırıq ki,

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (2)$$

(2) tənliyinə (1) diferensial tənliyinin xarakteristik tənliyi deyilir. Bu tənlikdən k-nı tapaq

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (3)$$

Burada aşağıdakı hallar mümkündür.

1. Əgər (2) xarakteristik tənliyinin k_1 və k_2 kökləri həqiqi və müxtəlifdirsə, onda $y_1 = e^{k_1 x}$ və $y_2 = e^{k_2 x}$ funksiyaları xüsusi həllərdir. Deməli, (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (4)$$

2. Əgər (2) xarakteristik tənliyinin kökləri həqiqi və bərabərdirsə ($k_1 = k_2$), onda (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı düsturla ifadə olunar:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x) \qquad (5)$$

3. Əgər (2) xarakteristik tənliyinin k_1 və k_2 kökləri kompleks olarsa ($k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$), onda (1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \qquad (6)$$

şəklində olur.

Toplama teoremi

Teorem.İstənilən A və B hadisələri üçün

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

İsbatı. $P(A+B)$ehtimalı A və B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan elementar hadisələrin ehtimalları cəmidir.Bu zaman elementar hadisə eyni zamanda A və B-yə daxil olduqda bir dəfə götürülür.Ona görə də

$$P(A+B)\le P(A)+P(B)$$

Elementar hadisə eyni zamanda A və B-yə daxil olduqda o, axırıncı bərabərsizliyin sağ tərəfinə iki, sol tərəfinə isə bir dəfə daxil olur.Ona görə də sağ tərəf sol tərəfdən $P(AB)$ qədər böyükdür.Beləliklə,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

EHTİMALIN VURMA DÜSTURU.

B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin $P(A/B)$ şərti ehtimalı

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

düsturu ilə hesablanılır.Buradan, B hadisəsinin $P(B)\succ 0$ şərtsiz ehtimalı məlum olduqda , A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsinin ehtimalını təyin etmək olar:

Fərz edək ki, $A_1,\dots A_n$ hadisələri

$$P(A_1)\succ 0, P(A_1A_2)\succ 0,\dots, P[A_1\dots A_n]\succ 0$$

şərtlərini ödəyir.Onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$P(A_1\dots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A\ \dots A_{n-})$$

Doğrudanda

$$p(A_1)P(A_2/A_1)\dots P(A_n/A_1\dots A_{n-1})=P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\dots\frac{P(A_1A_2\dots A_n)}{P(A_1A_2\dots A_{n-1})}=P(A_1A_2\dots A_n)\text{olar.}$$

TAM EHTİMAL DÜSTURU

Fərz edək ki, $A_1,\dots,A_n$ hadisələri tam sistem təşkil edir.Onda ixtiyari A hadisəsi üçün

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)$$

İsbatı.Doğrudanda ehtimalın toplama və vurma düsturlarına əsasən yaza bilərik:

$$P(A)=P(A\Omega)=P\left(\sum_{i=1}^{n}AB_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)$$

BEYES DÜSTURU.

B hadisəsi $A_k(k=1,2,\dots,n)$ hadisələrindən biri başverdikdə başverir və sınaq nəticəsində B hadisəsi başvermişdir. Sınaqdan əvvəl $A_k(k=1,2,\dots,n)$ hadisələrinin $P(A_k)$ ehtimalları və B hadisəsinin $A_k(k=1,2,\dots,n)$ hadisələrinin hər birinə görə $P(B/A_k)$ şərti ehtimalları məlumdur. B hadisəsinin baş verməsi A_k hadisəsinin ehtimalına necə təsir edir?

Bu məsələni həll etmək üçün

$$P(BA_k)=P(B)P(A_k/B)=P(A_k)P(B/A_k)$$

bərabərliklərindən istifadə edək.

Buradan

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$$

bərabərliyi və tam ehtimal düsturuna əsasən

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B/A_k)},k=1,2,\dots,n$$

münasibəti alınır.Axırıncı bərabərliyə Beyes düsturu deyilir.

Burada baxılan $A_k, k=1,2,...,n$ hadisələrinə bəzən fərziyyələr, Beyes düsturuna isə fərziyyələr teoremi deyilir.Beyes dusturu B hadisəsi başverdikdən sonra $A_k, k=1,2,...,n$ hadisələrinin başverməsi haqında fərziyyələrin ehtimallarını yenidən qiymətləndirməyə imkan verir.

Şərti ehtimal

Təcrübədə bir çox hallarda A hadisəsinin ehtimalını başqa bir B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində hesablamaq lazım gəlir. Bu cür ehtimala şərti ehtimal deyillir. B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsinin şərti ehtimalı $P(A/B)$ kimi işarə edilir.

Tutaq ki, n elementar hadisədən m-i A hadisəsi, k saydası isə B hadisəsi üçün əlverişlidir.Onda

$$P(A)=\frac{m}{n}, P(B)=\frac{k}{n}$$

Fərz edək ki, B hadisəsi başverdikdə A hadisəsi üçün əlverişli halların sayı $l-$dir.Onda kllasik ehtimalın tərifinə A hadisəsinin şərti ehtimalı

$$P(A/B)=\frac{l}{k}$$

olar.Axırıncı bərabərlikdə kəsrin surət və məxrəcini n-ə bölsək, şərti ehtimal üçün

$$P(A/B)=\frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

düsturunu alarıq. AB hadisəsi üçün əlverişli halların sayı $l-$ olduğu üçün $\frac{l}{n}$ mütləq ehtimaldır.Beləliklə, B hadisəsinin baş verməsi şərtində A hadisəsnin şərti ehtimalı $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ kimi hesablanılır.

Şərti ehtimalın xassələri.

1. $P(A/B)\geq 0$

2. $P(A/\Omega)=1$

3. $P(A/B)+P(\bar{A}/B)=1$

4. $P(\varnothing/B)=0$

5. $A_1 \subset A_2$ olduqda $P(A_1/B)\le P(A_2/B)$

6. $0\le P(A/B)\le 1$

7. $P(A_1\cup A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)-P(A_1A_2/B)$

Bernulli düsturu və Bernulli teoremi.

Tutaq ki, n sayda asılı olmayan sınaq aparılır və hər bir sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit p ədədinə, baş verməməsi ehtimalı isə q=1-p ədədinə bərabərdir.i-ci sınağın nəticəsini $B_i, i=1,2,...,n$ ilə işarə edək.Bu ardıcıllığın m hissəsində A hadisəsi, qalan n-m hissəsində isə $\bar{A}$ olarsa, belə ardcıllıqların sayı C_n^m olar.

Sınaqlar asılı olmadıqlarından onların nəticələri – hadisələr də asılı deyillər və ehtimalların vurulması qaydasına görə belə ardıcıllığın ehtimalı $p^m q^{n-m}$ ədədinə bərabər olar.Onda uyuşmayan (birgə olmayan) hadisələrin ehtimalları haqqında qaydaya görə m-qədər A-dan və n-m qədər $\bar{A}$-dən ibarət ardıcıllıqların ehtimalları cəmi

$$p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

olar.Aparılan n Bernulli sınağında "+" nəticənin baş vermə sayını s_n ilə işarə edək.Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

Bernulli düsturu. Tutaq ki, aparılan n Bernulli sınağında müsbət nəticənin başvermə sayı s_n-dir. Hər sınaqda müsbət nəticənin baş vermə ehtimalı isə p-dir.Bu halda

$$p_n(m) =$$
$$P(s_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} (q = 1 - p, m = 0,1,2,..., n)$$

$p_n(m)$ ehtimallarına binomial paylanma deyilir.Bu paylanma m=0,1,..., n ədədləri ilə $p_n(m)$-lər arasında uyğunluq şəklində verilir. (1) ehtimalı $(px+q)^n$ binomunun ayrılışında x^k-nın əmsalına bərabər olduğuna görə, ona binomial ehtimal deyilirlər.Binomial ehtimalların çoxluğu binomial paylanma, n və p sabitləri isə onun parametrləri adlanır.

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏT ANLAYIŞI.

Təsadüfü kəmiyyət, baxılan hadisəni keyfiyyət və kəmiyyətcə xarakterizə edən və təsadüfü amillərin təsiri ilə bu və ya digər şəkildə müxtəlif qiymətlər ala bilən kəmiyyətlərdir.Təsadüfü kəmiyyətin hansı qiymət alacağını qabaqcadan qəti demək mümkün deyildir.Onun hər bir sınaqda aldığı qiymətlər müxtəlif səbəb və təsadüflərdən asılı olaraq dəyişir.

Sınağın nəticəsini keyfiyyətcə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı konkret əlamət fakt qeyd olunur və onun nəticəsinin əlamətə malik olub-olmadığı müəyyənləşdirilir.Qeydə alınan bu əlamət hadisə adlanır və deyirlər : “hadisə baş verdi”, ya da “hadisə baş vermədi”.

Sınağın nəticəsini kəmiyyətcə xarakterizə etmək o deməkdir ki, sınaq zamanı hər hansı kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər müəyyən olunur, belə ki, həmin qiymətləri sınağa qədər təyin etmək mümkün deyildir.Belə kəmiyyətlər təsadüfi adlanır.

Deməli, təsadüfü kəmiyyət sınaq nəticəsində bu və ya digər qiymət ala biləcək dəyişən kəmiyyətdir.

Təsadüfü kəmiyyətin qabaqcadan hansı qiymətləri alacağını qəti demək mümkün deyildir.Təsadüfü kəmiyyətin ancaq ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu göstərilir.Bu qiymətlər sonlu, hesabi və qeyri hesabi çoxluq təşkil edə bilər. Əgər təsadüfü kəmiyyət sonlu və ya hesabi sayda izolə edilmiş $x_1, x_2, ...$ qiymətlərini ala bilirsə, ona diskret təsadüfü kəmiyyət deyilir.Təsadüfü

kəmiyyətin ala bildiyi qiymətlər hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalı təşkil edirsə, ona kəsilməz təsadüfü kəmiyyət deyilir.

TƏSADÜFÜ KƏMİYYƏTİN PAYLANMA FUNKSİYASI

Təsadüfü kəmiyyətləri ancaq onların ala bildiyi qiymətlər çoxluğunu göstərməklə təyin etmək mümkün deyildir.Belə ki, qiymətlər çoxluğu eyni olan, lakin bu qiymətləri müxtəlif ehtimallarla alan müxtəlif təsadüfü kəmiyyətlər vardır.Buna görə də, təsadüfü kəmiyyətin verilməsi üçün onun ala biləcəyi qiymətlər çoxluğu və həm də bu qiymətləri hansı ehtimalla aldığı göstərilməlidir.

Bu məqsədlə təsadüfü kəmiyyətin paylanma funksiyasına baxılır.

Istənilən həqiqi x üçün Ω_x çoxluğu σ-cəbr olan F sisteminə daxil olduğundan, onun ehtimalı təyin olunmuşdur.Bu ehtimala - X təsadüfü kəmiyyətinin x-dən kiçik qiymət alması hadisəsinin ehtimalına həmin kəmiyyətin paylanma funksiyası deyilir və

$$F(x) = P(X \prec x)$$

kimi işarə edilir.

Son

Riyaziyyat fənnindən imtahan sualları

1. Matris anlayışı
2. Bircinsli diferensial tənliklər
3. Tərs funksiyanın törəməsi
4. Müəyyən inteqral
5. Determinantın tərifi
6. Vektor anlayışı
7. Dəyişənləri əvəz etməklə inteqrallama
8. Vurma teoremi
9. Diferensialın mexaniki mənası
10. Adi diferensial tənliklər
11. Bayes düsturu
12. Qeyri-müəyyən inteqral
13. Funksiyanın törəməsi
14. Matrislərin cəmi
15. Vektorlar üzərində əməllər
16. İkitərtibli sabit əmsallı qeyri-bircins xətti diferensial tənliklər
17. Ehtimalın klassik tərifi
18. Nyuton-Leybnis düsturu
19. İnteqrallar cədvəli
20. Matrislərin fərqi və ədədə vurulması
21. Matrisin ranqı
22. Vektorların skalyar hasili
23. Tam ehtimal
24. Hissə-hissə inteqrallama üsulu
25. Koşi məsələsi

26. Törəmənin həndəsi mənası
27. Tərs matris
28. Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri
29. Təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası
30. Skalyar hasilin koordinatlarla ifadəsi
31. Determinantın xassələri
32. Birtərtibli deferansıal tənliklər
33. Dəyişənlərinə ayrılan tənliklər
34. İki matrisin hasili
35. Vektorların skalyar hasilinin xassələri
36. Tərs funksiyanın törəməsi
37. Vektorial hasilin koordinatlarla ifadəsi
38. Minor və cəbri tamamlayıcılar
39. Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz edilməsi
40. Vurma teoremi
41. Qeyri-müəyyən inteqral
42. Birtərtibli xətti tənliklər
43. Təsadüfi kəmiyyətlər haqqında anlayış
44. Kramer qaydası.
45. Vektorların qarışıq hasili.
46. Törəmənin mexaniki mənası.
47. Müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama
48. Şərti ehtimal.
49. Vektorların vektorial hasili.
50. Funksiyanın diferensialı.
51. Cəmin törəməsi
52. Təsadüfi hadisələr haqqında anlayış.
53. Müəyyən inteqralın xassələri.
54. İkitərtibli diferensial tənliklər.
55. Loqarifmik funksiyanın törəməsi.
56. Vekorial hasilin xassələri.

57. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu.
58. Hasilin törəməsi.
59. Xətti tənliklər sisteminin matris şəkli.
60. Xətti tənliklər sisteminin Qauss üsulu ilə həlli.
61. Qarışıq hasilin xassələri.
62. Üstlü funksiyanın törəməsi.
63. Təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi
64. Ikitərtibli sabit əmsallı bircins xətti diferensial tənliklər
65. Mürəkkəb funsiyanın törəməsi.
66. Qarışıq hasilin kordinantlarla ifadəsi.
67. Nisbətin törəməsi.
68. Diferensialın həndəsi mənası.
69. Üstlü-mürəkkəb funksiyanın törəməsi.

İstifadə olunan ədəbiyyatlar

1.R.Məmmədov “Ali riyaziyyat kursu” 1-ci hissə, 2-ci hissə, 3-cü hissə.

2.Y.Ş.Səlimov, C.A. İsmayılov, H.B.Hüseynov, Ə.M.Musayev “ Ali riyaziyyatdan testlər”

3.M.S.Alməmmədov, N.A.Mikayılov, T.N.Quluzadə ”Ali Riyaziyyat” 1-ci və 2-ci hissə.